

STŘEDOŠKOLSKÁ ODBORNÁ ČINNOST

Obor SOČ: 1. Matematika a statistika

Průsečíky exponenciální a logaritmické funkce

Intersections of the exponential and logarithmic functions

Autor: Adam Hanuš

Škola: Střední škola spojů a informatiky Tábor, Bydlinkého 2474, 390 11

Kraj: Jihočeský kraj

Konzultant: Mgr. Jiřina Bartoňová

Tábor 2019

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou práci SOČ vypracoval samostatně a použil jsem pouze prameny uvedené v seznamu na konci práce. Prohlašuji, že tištěná verze a elektronická verze soutěžní práce jsou shodné. Nemám závažný důvod proti zpřístupňování této práce v souladu se zákonem č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) v platném znění.

v Táboře dne 11. 4. 2019

.....

Poděkování

Chtěl bych velmi poděkovat paní učitelce Mgr. Jiřině Bartoňové za odborné vedení práce, cenné rady a velikou investici volného času, které mi pomohly tuto práci zkompletovat. Dále bych chtěl poděkovat Mgr. Martinu Machovi za poskytnutí materiálů pro další práci a výzkum.

Anotace

Cílem práce je najít průsečíky grafů exponenciální a logaritmické funkce o stejném základu a a popsat funkci závislosti souřadnic průsečíků na hodnotě základu a .

Pro nalezení průsečíků je využívána vlastní aplikace v jazyce C#. Data jsou dále zpracována pomocí tabulkového editoru Excel do tabulek a grafů.

Výstupem jsou tabulky souřadnic průsečíků. Na základě těchto tabulek jsou vytvořené grafy závislosti průsečíku na základu funkce.

Výzkum dospěl k překvapivému zjištění, které je v rozporu s tím, jak bylo na tyto funkce doposud nahlíženo.

Klíčová slova

exponenciální funkce; logaritmická funkce; graf funkce; tabulka funkčních hodnot; průsečík; Eulerovo číslo

Annotation

The aim of this work is to find the intersection of graphs of exponential and logarithmic functions of the same base a and to describe the function of intersection coordinates dependence on the value of the base a .

The own C # application is used to find the intersection. The data is further processed into spreadsheets and charts using the Excel spreadsheet editor.

The output are charts of intersection coordinates for bases. Based on these spreadsheets, graphs of the intersection dependence on the basis of the function are created.

The research came to a surprising finding, which is against mainstream perspectives so far.

Keywords

exponential function; logarithmic function; graph of function; table of functional values; intersection; Euler's number

Obsah

Úvod	6
1. Průsečík exponenciální a logaritmické funkce pro základ od 0 do 1	7
1.1 Funkce průsečík	7
1.2 Získávání dat	7
2. Zpracování dat	9
2.1 Zvláštní chování	9
2.2 Jiný způsob hledání průsečíků	11
2.3 Grafy funkcí pro malé základy	14
2.4 Bod zlomu	16
3. Průsečík exponenciální a logaritmické funkce pro základ větší než 1	17
3.1 Porovnávání tvrzení	17
3.2 Nový výzkum	18
3.3 Získávání dat	18
3.4 Získaná data	19
3.5 Závislost základu na průsečíku	21
4. Shrnutí výsledků	24
Závěr	26
Literatura a zdroje	27
Přílohy	28

Úvod

V hodinách matematiky jsme se zabývali exponenciální a logaritmickou funkcí. Bylo nám sděleno, že tyto funkce mají jeden průsečík, a to pouze pro základ od 0 do 1, nicméně jsme podrobněji neprobírali, kde se nachází. Toto téma mne zajímalo, proto jsem hledal materiály, které by tento průsečík blíže popsaly. Žádné práce jsem nenašel. Rozhodl jsem se tedy, že se budu tématem zabývat sám.

Chováním funkcí o základu $a \in (0;1)$ jsem se zabýval v práci pod názvem „Průsečík exponenciální a logaritmické funkce pro základ od 0 do 1“, se kterou jsem se účastnil soutěže SOČ 2018. Při obhajobě jsem byl členem komise upozorněn na článek na podobné téma. Tento článek potvrzoval mé závěry z loňské práce.

Mnou prohledávaná oblast základů se ukázala jako nedostačující, jelikož funkce mají průsečík, respektive průsečíky i pro základy $a > 1$.

Cílem této práce je rozšířit svoji stávající aplikaci v jazyce C# o tyto vyšší základy. Výstupem budou opět textové soubory s vypsanými hodnotami, které budou následně zpracovány.

Kapitola 1

Průsečík exponenciální a logaritmické funkce pro základ od 0 do 1

1.1 Funkce průsečík

Vzhledem k vlastnostem exponenciální a logaritmické funkce očekávám, že průsečík bude ležet na přímce $y=x$ a s rostoucím základem a jeho hodnota poroste.

Hledaný průsečík je číslo $x \in \mathbb{R}$, $x \in (0; 1)$ a mělo by splňovat následující podmínku:

$$\log_a x = a^x = x$$

1.2 Získávání dat

Pro hledání hodnot průsečíku jsem si vytvořil jednoduchou aplikaci. Pro její vývoj jsem využil programovací jazyk C# a vývojové prostředí Microsoft Visual Studio 2015.

Můj první pokus o hledání průsečíku byl založen na porovnávání hodnot exponenciální a logaritmické funkce pro daný základ a hledání bodu, ve kterém klesne hodnota logaritmu pod hodnotu exponenciální funkce. Vznikla tak metoda obsluhující tlačítko s textem „po setinách“.

Základem metody jsou dva do sebe vnořené cykly. Vnější cyklus je řízen proměnnou i , která mění po jedné hodnoty od 1 do 99. Při každém průchodu cyklem se vypočítá základ $a = \frac{i}{100}$. Ve vnitřním cyklu se proměnná x , která začíná na hodnotě a , dále zvětšuje po 10^{-8} . Cyklus probíhá, dokud je hodnota a^x menší, než hodnota $\log_a x$. Nalezené x je tedy nejmenší číslo z intervalu $(a; 1)$, pro které je hodnota a^x větší nebo rovna $\log_a x$. Interval $(a; 1)$ je pro hledání dostačující, protože $\log_a a = 1$ zatímco $a^x < 1$.

Výstupem metody je textový soubor s názvem *vystup_sto.txt*. V souboru je po řádcích zapsáno 99 čísel. Tato čísla jsou hledaná x pro základy od 0,01 do 0,99.

Po zpracování získaných hodnot v tabulkovém editoru Excel jsem zjistil překvapivé výsledky pro základ a menší než přibližně 0,07. Proto jsem se zaměřil na základy a po tisícinách od 0,001 do 0,1 a na základy od 0,06 do 0,07 po desetitisícinách. Vytvořil jsem tedy tlačítka s textem „po tisícinách“ a „detail“. Obě metody fungují pomocí stejného algoritmu, tedy hledáním bodu x , ve kterém logaritmická křivka klesne pod exponenciální. Metoda „detail“ navíc má o jedno desetinné místo větší přesnost, protože x se v cyklu mění o 10^{-9} .

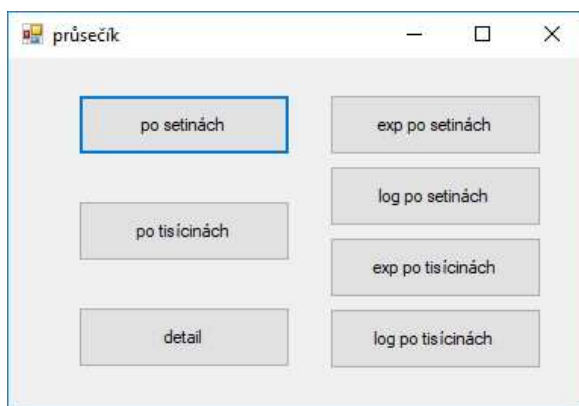
Výstupem tlačítka „po tisícinách“ je textový soubor *vystup_tisic.txt*. V souboru je po řádcích zapsáno 100 čísel. Tato čísla jsou hledaná x pro základy od 0,001 do 0,1 po

jedné tisícině. V souboru *vystup_detail.txt* je také sto čísel. Hledaná x jsou pro základy od 0,06 do 0,07 po jedné desetitisícině.

Vzhledem k výše zmíněným zvláštním hodnotám pro malé základy jsem zvolil ještě jiný způsob hledání průsečíku. Hledal jsem průsečík funkce $y = a^x$ s funkcí $y = x$ a zvlášť průsečík funkce $y = \log_a x$ s funkcí $y = x$. Algoritmus je téměř stejný. Liší se jen podmínkou opakování vnitřního cyklu, která je $x < a^x$, respektive $x < \log_a x$

Průsečíky jsem hledal pomocí čtyř metod, jejichž tlačítka jsou v pravém sloupci v okně aplikace. Hledal jsem jak po setinách pro a od 0,01 do 0,99, tak po tisícinách od 0,001 do 0,1. Výstupem jsou soubory *vystup_Exp_sto.txt* (exponenciální po setinách), *vystup_exp.txt* (exponenciální po tisícinách), *vystup_LOG_sto.txt* (logaritmická po setinách), *vystup_log.txt* (logaritmická po tisícinách).

Hodnoty ze všech vytvořených textových souborů jsem zkopíroval do tabulkového editoru v Excel, kde jsem je dále zpracoval. Tabulky jsou přiloženy jako přílohy práce.



Obr. 6: uživatelské prostředí aplikace

Kapitola 2

Zpracování dat

V této kapitole je popsáno, jak byla získána a zpracována data, která jsou zkoumána a čím jsou zajímavá.

2.1 Zvláštní chování

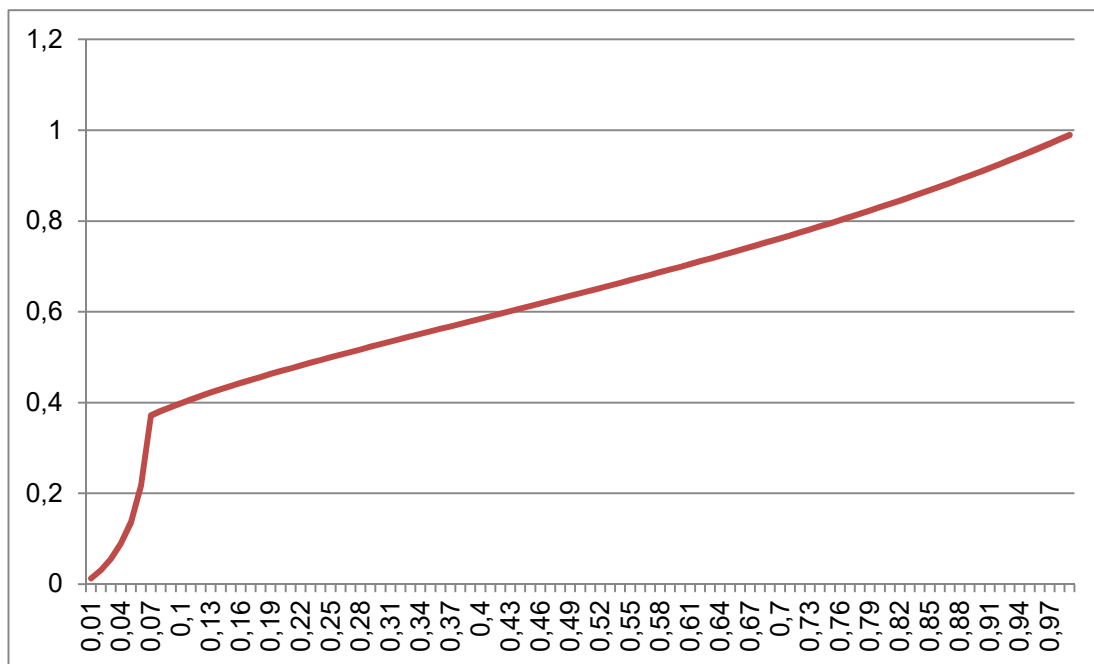
a	x	$\log_a x$	a^x
0,01	0,01309253	0,941488211	0,941488327
0,02	0,03146157	0,884194309	0,884194352
0,03	0,05613297	0,821327359	0,821327365
0,04	0,08960085	0,749451238	0,749451248
0,05	0,1373594	0,662660829	0,662660830
0,06	0,21689807	0,543229522	0,543229523
0,07	0,37192833	0,371928315	0,371928315
0,08	0,38151534	0,381515339	0,381515339
0,09	0,39050495	0,390504931	0,390504932
0,10	0,39901298	0,399012976	0,399012977
0,11	0,40712462	0,407124615	0,407124615
0,12	0,41490451	0,414904500	0,414904501

Tab. 1: Část zpracovaných dat

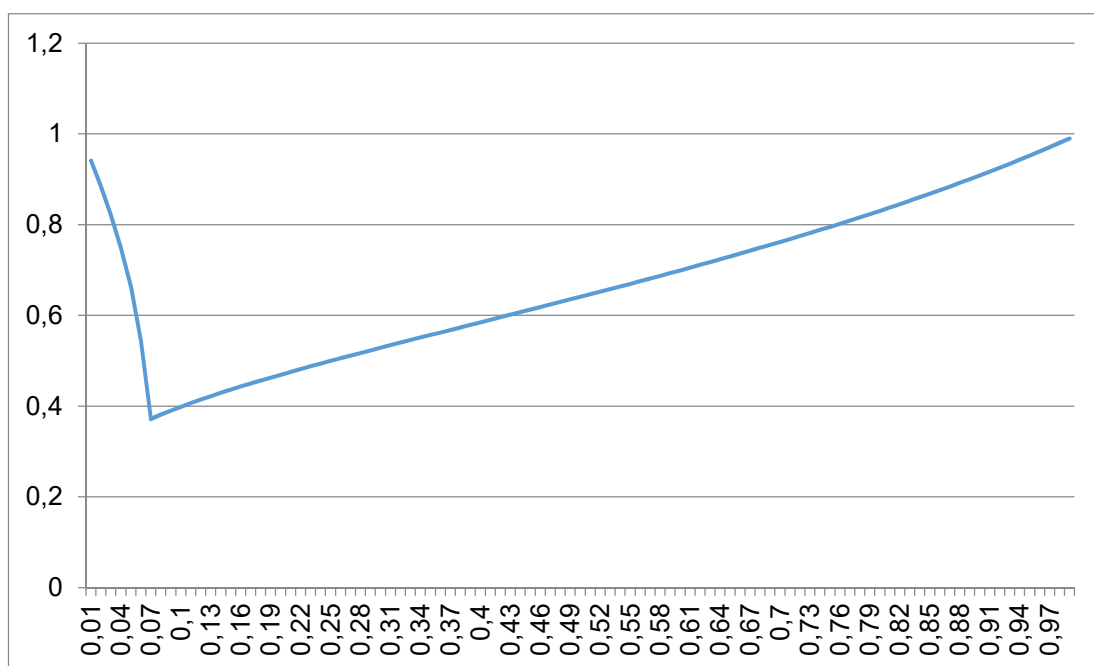
Hodnoty sloupce „x“ jsou vygenerované aplikací, tzn., jsou zkopírované ze souboru *vystup_sto.txt*. Můžeme si povšimnout, že přibližně do hodnoty $a=0,07$ jsou rozdíly mezi získaným x a funkčními hodnotami $\log_a x$ a a^x . Nesplňují tedy podmínku, definovanou v kap. 1.1, že: $\log_a x = a^x = x$. Vyšší základy tuto rovnici splňují, tzn., že se všechny hodnoty téměř shodují.

Ze zpracované tabulky jsem vytvořil grafy závislosti hledaného x na základu a a závislosti funkčních hodnot na základu a .

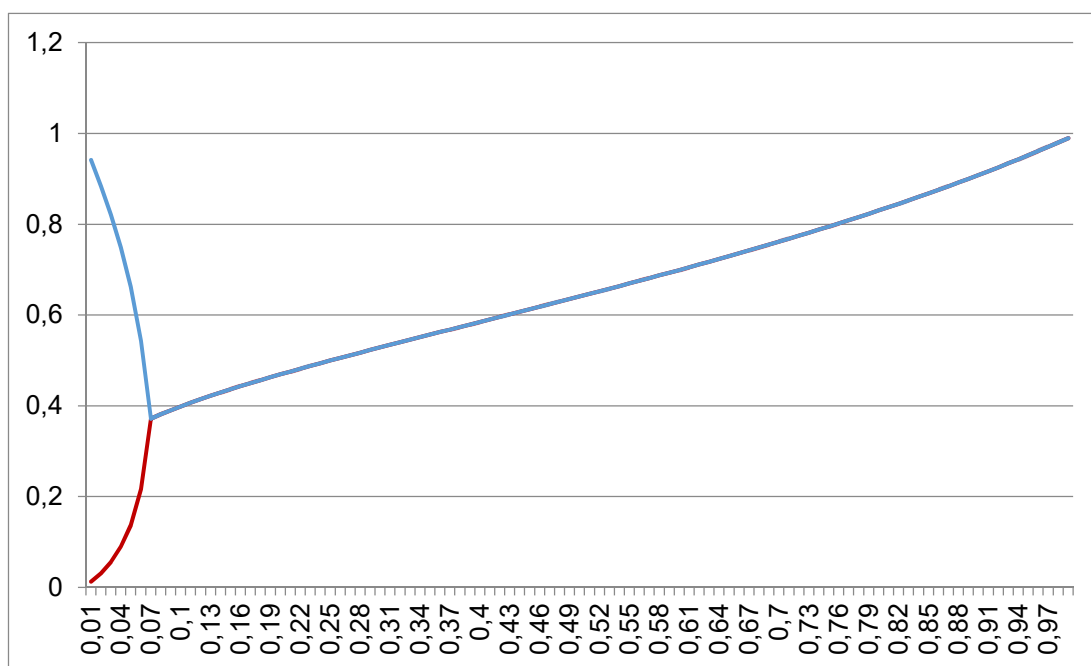
Celá tabulka a všechny grafy jsou v souboru *tabulky pro a do 0,99 po setinách.xlsx*



Obr. 7: hledané x pro $a \in \{0,01;0,99\}$; na vodorovné ose grafu jsou základy a , na svislé ose jsou hodnoty hledaného x



Obr. 8: Funkční hodnoty x pro $a \in \{0,01;0,99\}$; na vodorovné ose grafu jsou základy a , na svislé ose jsou funkční hodnoty

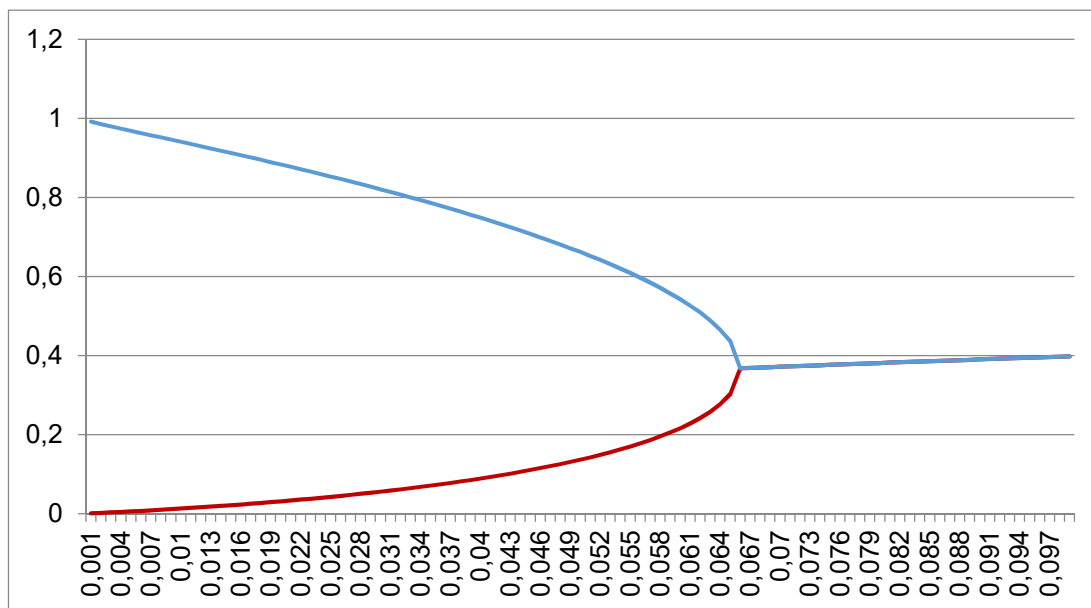


Obr. 9: Oba grafy sloučené do jednoho

Celá tabulka a všechny výše uvedené grafy jsou v souboru *tabulky pro a do 0,99 po setinách.xlsx*

Z grafů je vidět, že přibližně od $a=0,07$ křivky splynou.

Abych se ujistil, že zvláštní chování průsečíku pro $a < 0,07$ není způsobené chybnou interpretací malých čísel při výpočtech v aplikaci, rozšířil jsem aplikaci o výpočet pro základy od 0,001 do 0,1 po tisícinách. Vygenerovaný graf je velmi podobný obr. 8, ale detailněji zobrazuje oblast hledaného čísla.



Obr. 10: Grafy hledaného x a funkčních hodnot x pro $a \in (0,001; 0,1)$, sloučené do jednoho

Zpracovaná data jsou v souboru *tabulky pro a do 0,1 po tisícinách.xlsx*

2.2 Jiný způsob hledání průsečíku

Rozhodl jsem se pro výzkum jiným způsobem. Porovnával jsem hodnoty každé funkce (exponenciální a logaritmické) zvlášť s funkcí $y=x$, tedy tak, aby byly splněny podmínky.

$$\log_a x = x; a = x^x$$

V následujících tabulkách je možné vidět, že i pro základy $a < 0,07$ se hodnoty nalezené pro logaritmickou i exponenciální funkci shodují a zároveň splňují podmínku definovanou v kap. 1.1, tj.

$$x = a^x = \log_a x$$

a	x	$\log_a x$
0,01	0,27798743	0,277987421
0,02	0,30420452	0,30420451
0,03	0,32261916	0,322619148
0,04	0,33747076	0,337470741
0,05	0,35022486	0,350224846
0,06	0,36157981	0,361579801
0,07	0,37192833	0,371928315
0,08	0,38151534	0,381515339
0,09	0,39050495	0,390504931
0,10	0,39901298	0,399012976
0,11	0,40712462	0,407124615
0,12	0,41490451	0,4149045

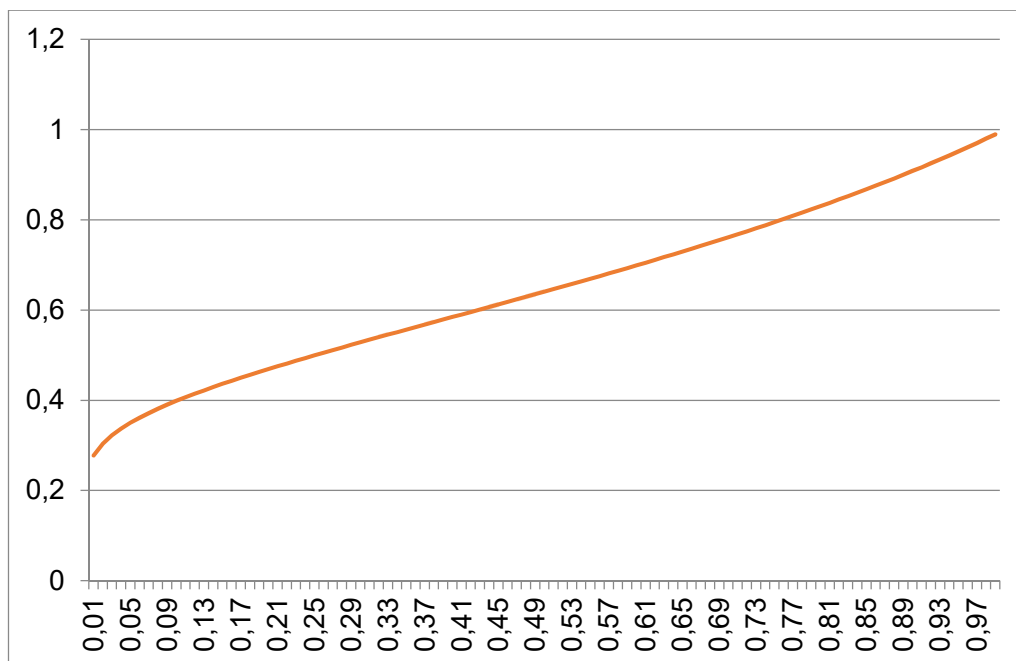
Tab. 2: Porovnávání x s hodnotami funkce $\log_a x$

a	x	a^x
0,01	0,27798743	0,277987418
0,02	0,30420452	0,304204508
0,03	0,32261916	0,322619147
0,04	0,33747076	0,337470739
0,05	0,35022486	0,350224845
0,06	0,36157981	0,361579801
0,07	0,37192833	0,371928315
0,08	0,38151534	0,381515339
0,09	0,39050495	0,390504932
0,1	0,39901298	0,399012977
0,11	0,40712462	0,407124615
0,12	0,41490451	0,414904501

Tab. 3: Porovnávání x s hodnotami funkce a^x

Kompletní tabulky a grafy jsou v souborech *porovnávání s x po setinách.xlsx* a *porovnávání s x po tisícinách.xlsx*.

Výsledky můžeme zobrazit v následujícím grafu. Data jsou čerpána z hodnot logaritmické funkce, nicméně hodnoty jsou totožné s hodnotami exponenciální funkce. Grafy by tedy vypadaly stejně.



Obr. 11: Hledané x , které splňuje podmínku; na vodorovné ose grafu jsou základy a , na svislé ose jsou hodnoty hledaného x

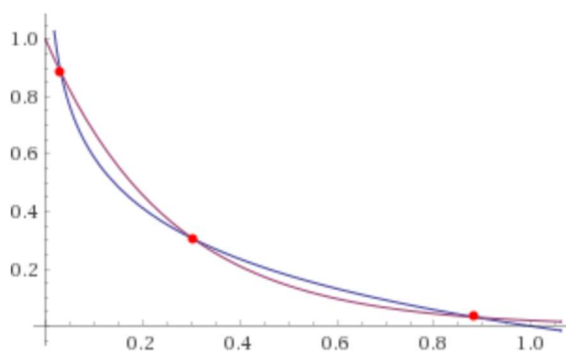
2.3 Grafy funkcí pro malé základy

Vzhledem k hodnotám z předchozích pozorování mě napadlo hledat řešení rovnice $\log_a x = a^x$ pomocí nástroje Wolfram Alpha.

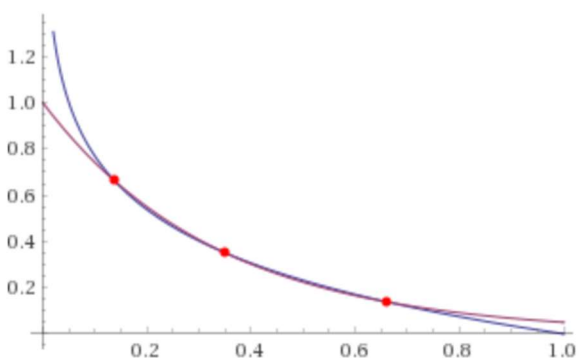
Wolfram Alpha je odpovídací stroj, vytvořený firmou Wolfram Research. Jde o službu, která se snaží přímo odpovídat na dotazy uživatele, na rozdíl od vyhledávacích služeb, které poskytnou pouze seznam stránek, pravděpodobně obsahujících odpověď. Wolfram Alpha je vytvořen na základě výpočetního softwaru Mathematica, který je využíván pro řešení algebraických úloh, numerických a statistických výpočtů, ale i vizualizaci výsledků. Odpověď na dotaz se zobrazí v člověku čitelné a přehledné formě. Často je přiložen i postup vedoucí k výsledku. ^[1]

Hledal jsem řešení výše zmíněné rovnice pro základy $a=0,02$; $0,05$; $0,07$. Zjistil jsem, že pro základy $a=0,02$; $0,05$ jsou průsečíky exponenciální a logaritmické funkce 3. Pro základ $a=0,07$ je průsečík pouze 1.

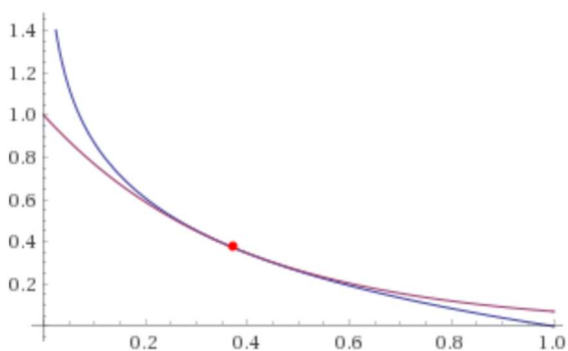
Následující grafy znázorňují zmíněné výsledky a potvrzují toto tvrzení.



Obr. 12: Graf funkcí $\log_{0,02} x$; $0,02^x$. Modrá křivka je pro logaritmickou funkci, fialová křivka je pro exponenciální funkci.



Obr. 13: Graf funkcí $\log_{0,05} x$; $0,05^x$. Modrá křivka je pro logaritmickou funkci, fialová křivka je pro exponenciální funkci.



Obr. 14: Graf funkcí $\log_{0,07} x$; $0,07^x$. Modrá křivka je pro logaritmickou funkci, fialová křivka je pro exponenciální funkci.

Pro srovnání jsem podobné grafy vytvořil také v tabulkovém editoru Excel. Výsledky jsou v souboru *grafy malých základů.xlsx*

2.4 Bod zlomu

Moje podezření, že pro základy menší, než jisté číslo mají exponenciální a logaritmická funkce tři průsečíky, se potvrdilo. Teď už jen zbývalo najít co nejpřesněji hodnotu základu, od které je průsečík jen jeden. Toto číslo jsem si nazval „bod zlomu“.

Z dat získaných pro základy po setinách vyplynulo číslo 0,07. Po prozkoumání intervalu $<0,001; 0,1>$ po tisícinách se hodnota upřesnila na 0,066. Pro ještě přesnější detekci „bodu zlomu“ jsem do aplikace přidal zkoumání detailu, tedy oblasti mezi hodnotami základu 0,06 a 0,07, a to po desetitisícinách.

a	x	$\log_a x$	a^x
0,0654	0,317535736	0,420633259	0,420633259
0,0655	0,321911098	0,415848306	0,415848306
0,0656	0,326787474	0,410562231	0,410562231
0,0657	0,332375867	0,404564028	0,404564028
0,0658	0,339097535	0,397432441	0,397432441
0,0659	0,348099381	0,388020565	0,388020565
0,066	0,36789171	0,367891709	0,367891709
0,0661	0,367994203	0,367994202	0,367994202
0,0662	0,368096613	0,368096612	0,368096612
0,0663	0,368198939	0,368198938	0,368198938
0,0664	0,368301182	0,368301181	0,368301181

Tab. 4: Část tabulky hodnot funkcí detailu

Kompletní tabulka je v souboru *detail pro a od 0,06 do 0,07.xlsx*

Z výše uvedené tabulky vyplývá, že hledaný základ je přibližně 0,0659. Pro základ $a=0,066$ se x a funkční hodnota obou funkcí shodují. Hledané x je přibližně 0,36789171.

Vzhledem k tomu, že pro exponenciální a logaritmickou funkci má zvláštní význam Eulerovo číslo, tedy číselná konstanta označovaná písmenem e , napadlo mě hledat souvislost mezi e a zjištěnými hodnotami. Odhalit, že hledané x a funkční hodnoty obou funkcí by se mohly rovnat $\frac{1}{e}$, nebylo těžké. Se zkoumáním základu to už tak snadné nebylo. Metodou pokus – omyl jsem došel k číslu $\frac{1}{e^e}$, respektive e^{-e} .

Z výpočtu $(e^{-e})^{\frac{1}{e}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$ vyplývá, že musí platit i $\log_e e^{-e} = \frac{1}{e}$.

Přibližná hodnota výše uvedených čísel podle Wolfram Alpha:

$$\frac{1}{e} = 0,36787944$$
$$e^{-e} = 0,06598803$$

Kapitola 3

Průsečík exponenciální a logaritmické funkce pro základ větší než 1

Během krajského kola loňské soutěže jsem byl členem poroty upozorněn na dostupný článek, „*On intersections of the exponential and logarithmic curves*“^[2] na podobné téma. Článek jsem si přečetl a jeho závěry porovnal s mými. Jeho plné znění uvádím v příloze 5.

3.1 Porovnání tvrzení

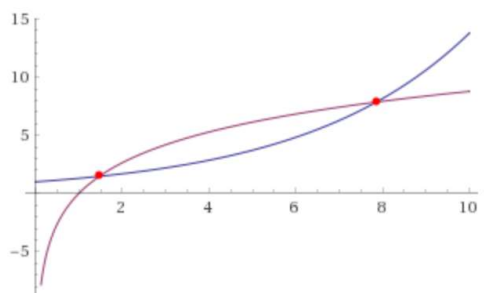
Můj závěr, že funkce mají pro základ $a < \frac{1}{e}$ tři průsečíky plně korespondovalo s tvrzením uvedeném v článku. Můj druhý závěr, že od tohoto základu včetně do jedné je průsečík jen jeden, se shoduje pouze částečně. Tvrzení v článku ho nevyvrací, pouze doplňuje.

Při hledání průsečíku pro základ od 0 do 1 jsem nečekal, že zjistím něco jiného, než jsem předpokládal. Až „divné“ výsledky mě přivedly ke zjištění, že průsečíky mohou být i tři. Autoři článku naopak tuší, že jsou základy, pro které je průsečíků více. Jako příklad uvádějí základ $a = \frac{1}{16}$.

$$\log_{\frac{1}{16}} \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \qquad \log_{\frac{1}{16}} \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

Tím pro $a = \frac{1}{16}$ vycházejí dva průsečíky $\left[\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right]$ a $\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$, které neleží na přímce $y = x$.

V článku se dále tvrdí, že pro základy od 1 do přibližně 1,44 jsou průsečíky dva. Použil jsem Wolfram Alpha pro vykreslení grafů funkcí $y = 1,3^x$ a $y = \log_{1,3} x$

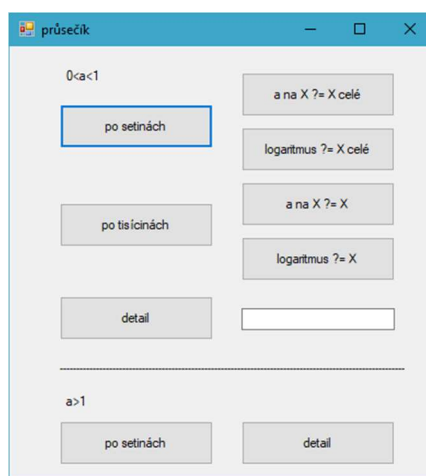


Obr. 15: Graf funkcí $\log_{1,3} x$; $1,3^x$. Modrá křivka je pro exponenciální funkci, fialová křivka je pro logaritmickou funkci.

3.2 Nový výzkum

Zjištěnými fakty jsem byl příjemně překvapen, podobně jako při zjištění při loňském výzkumu, který se nicméně ukázal jako nedostačující, zejména pak v rozsahu zkoumané oblasti základů. Rozhodl jsem se rozšířit aplikaci o tlačítka, která budou zkoumat průsečíky pro základy $a \in (1; z)$, přičemž číslo z je v podstatě 2. bod zlomu, který bude dále přiblížen.

3.3 Získávání dat



Obr. 16: Uživatelské prostředí nové verze aplikace

Stávající aplikaci jsem rozšířil o dvě nová tlačítka v sekci „ $a > 1$ “, nicméně způsob výpočtů a zápis zdrojového kódu zůstal bez větších změn, pouze je porovnávána funkce a^x s hodnotou x , tedy $a^x = x$. Tlačítko „po setinách“ porovnává hodnoty funkce pro základy $a \in (1,01; 1,44)$ a tlačítko „detail“ porovnává hodnoty pro základy $a \in (1,4401; 1,4450)$. Výstupem jsou opět textové soubory. Za účelem přehledu o stavu výpočtů bylo přidáno textové pole, do kterého aplikace vypisuje, se kterým základem momentálně pracuje. Výpočet jedné metody trvá přibližně 10-15 minut, závisle na hardwaru.

Oproti loňskému roku byla aplikace tvořena se záměrem a se znalostí zajímavé oblasti, zpracovávání dat tedy bylo podstatně jednodušší.

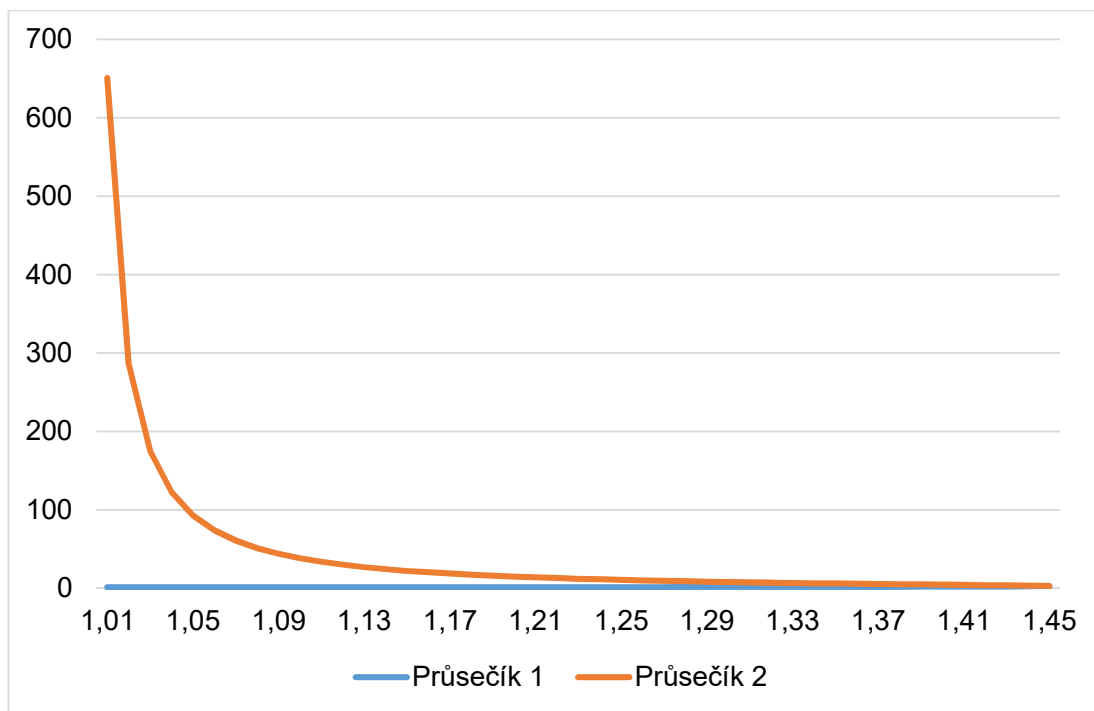
3.4 Získaná data

a	x₁	a^{x₁}	x₂	a^{x₂}
1,4401	2,39696266	2,39696266	3,11840946	3,118409461
1,4402	2,40015511	2,400155109	3,11347158	3,113471581
1,4403	2,40339052	2,403390519	3,10849165	3,108491651
1,4404	2,40667039	2,406670389	3,10346816	3,10346816
1,4405	2,40999633	2,40999633	3,09839952	3,098399521
1,4406	2,41337003	2,41337003	3,09328403	3,093284031
1,4407	2,41679330	2,416793299	3,08811988	3,08811988
1,4408	2,42026803	2,42026803	3,08290517	3,082905171
1,4409	2,42379628	2,42379628	3,07763785	3,07763785
1,4410	2,42738022	2,42738022	3,07231576	3,072315761

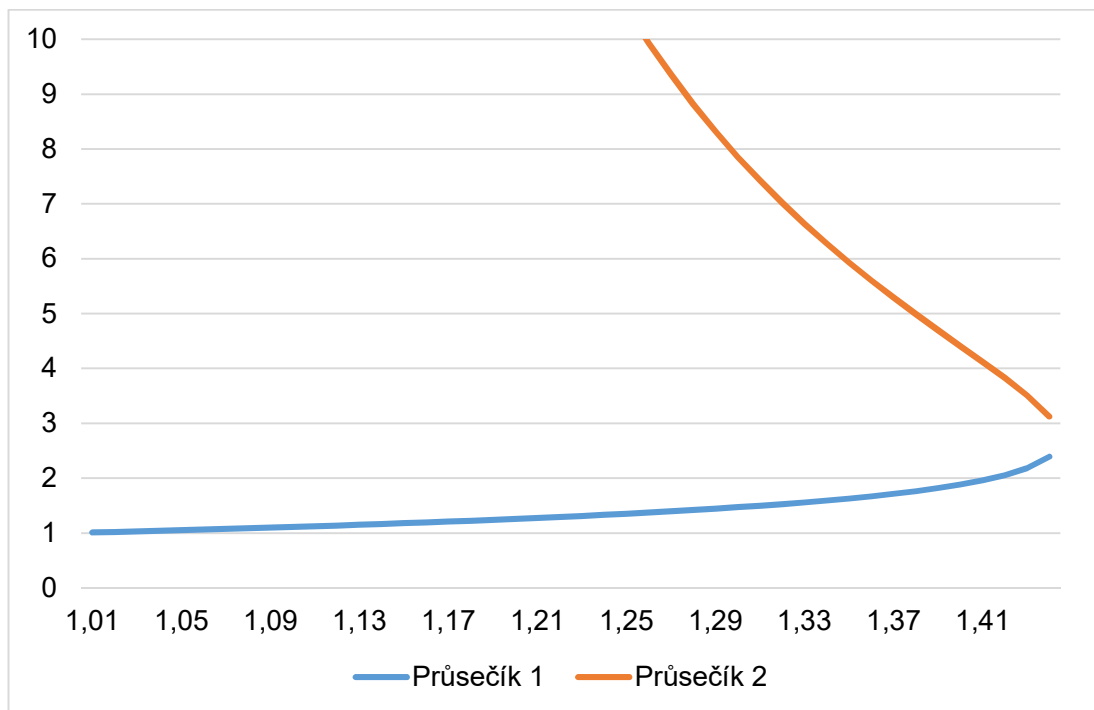
Tab. 5: Část nových dat, metoda „po setinách“

a	x₁	a^{x₁}	x₂	a^{x₂}
1,4401	2,39696266	2,39696266	3,11840946	3,118409461
1,4402	2,40015511	2,400155109	3,11347158	3,113471581
1,4403	2,40339052	2,403390519	3,10849165	3,108491651
1,4404	2,40667039	2,406670389	3,10346816	3,10346816
1,4405	2,40999633	2,40999633	3,09839952	3,098399521
1,4406	2,41337003	2,41337003	3,09328403	3,093284031
1,4407	2,41679330	2,416793299	3,08811988	3,08811988
1,4408	2,42026803	2,42026803	3,08290517	3,082905171
1,4409	2,42379628	2,42379628	3,07763785	3,07763785
1,4410	2,42738022	2,42738022	3,07231576	3,072315761

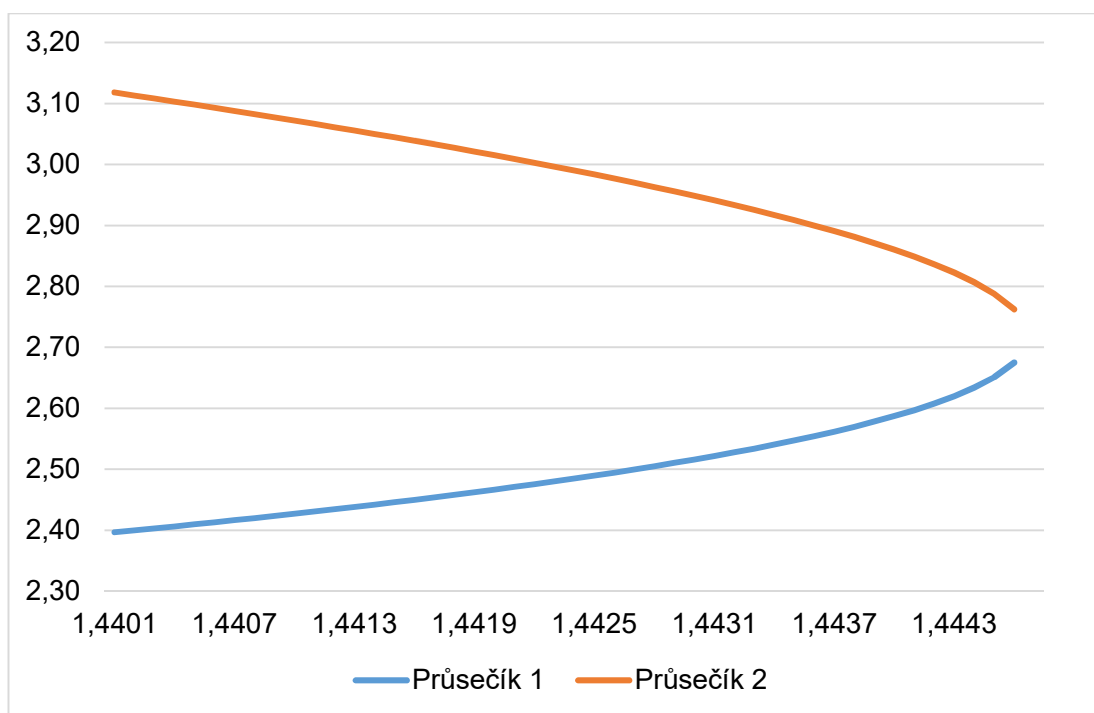
Tab. 6: Část nových dat, metoda „detail“



Obr. 17: Graf hledaných x pro základy $a \in (1,01; 1,44)$; na vodorovné ose grafu jsou základy a , na svislé ose jsou hodnoty hledaného x



Obr. 18: Detail grafu výše; na vodorovné ose grafu jsou základy a , na svislé ose jsou hodnoty hledaného x



Obr. 19: Graf hledaných x pro základy $a \in (1,4401; 1,4450)$; na vodorovné ose grafu jsou základy a , na svislé ose jsou hodnoty hledaného x

3.5 Závislost základu na průsečíku

Při porovnání obou bodů zlomu jsem dospěl ke zjištění, že se jedná o funkční hodnoty funkce $y = \sqrt[x]{x}$ pro $x = \frac{1}{e}$ u 1.bodu a $x = e$ u 2. bodu.

Jestliže $a = \sqrt[x]{x}$, pak $a^x = (\sqrt[x]{x})^x = x$.

Z tohoto vztahu vyplývá, že pro x , která splňují podmínku $a^x = \log_a x = x$, musí být základ $a = \sqrt[x]{x}$. A mnou vytvořené křivky závislosti x na a musí být inverzní ke grafu funkce $y = \sqrt[x]{x}$.

a	x	$\sqrt[x]{x}$
0,01	0,277987	0,01
0,02	0,304205	0,02
0,03	0,322619	0,03
0,04	0,337471	0,04
0,05	0,350225	0,05
0,06	0,36158	0,06
0,07	0,371928	0,07
0,08	0,381515	0,08
0,09	0,390505	0,09
0,1	0,399013	0,1

Tab. 7: Důkaz, že $a = \sqrt[x]{x}$, pro základy menší než 1

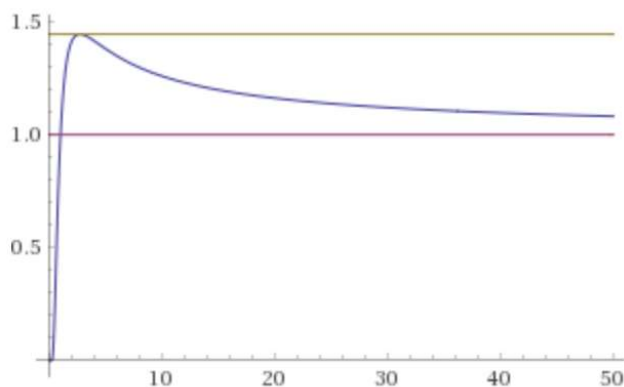
a	x₁	$\sqrt[x_1]{x_1}$	x₂	$\sqrt[x_2]{x_2}$
1,01	1,010102	1,01	651,1003	1,01
1,02	1,020412	1,02	285,5363	1,02
1,03	1,030943	1,03	174,6642	1,03
1,04	1,041702	1,04	122,6151	1,04
1,05	1,052703	1,05	92,87153	1,05
1,06	1,063958	1,06	73,82489	1,06
1,07	1,075478	1,07	60,68171	1,07
1,08	1,087279	1,08	51,11873	1,08
1,09	1,099375	1,09	43,87971	1,09
1,1	1,111782	1,1	38,22873	1,1

Tab. 7: Důkaz, že $a = \sqrt[x]{x}$, pro základy větší než 1

Pro bližší prozkoumání vlastností funkce $y = \sqrt[x]{x}$ jsem opět využil Wolfram Alpha.

Zjistil jsem, že funkce $y = \sqrt[x]{x}$ je pro $x \in (0, e)$ rostoucí a pro $x \in (e, \infty)$ klesající.

V bodě e nabývá maxima a $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x} = 1$



Obr. 15: Graf funkcí $y = \sqrt[x]{x}$; $y = \sqrt[e]{e}$. Modrá křivka je pro $y = \sqrt[x]{x}$, fialová křivka je pro $y=1$, žlutá křivka je pro $y = \sqrt[e]{e}$.

Pro počet průsečíků splňujících rovnici $a^x = \log_a x = x$ z vlastností funkce $y = \sqrt[x]{x}$ vyplývá, že základ $a \in (0, 1)$ vznikne pouze jeden pro $x \in (0, 1)$, ale základ $a \in (1, \sqrt[e]{e})$ vznikne dvakrát. Jednou pro $x < e$ a podruhé pro $x > e$.

Kapitola 4

Shrnutí výsledků

Ve výše uvedeném článku je vyslovena a následně dokázána věta:

Rovnice $a^x = \log_a x$

nemá řešení pro $a \in (\sqrt[e]{e}; \infty)$

má právě jedno řešení pro $a \in \langle e^{-e}; 1 \rangle \cup \{\sqrt[e]{e}\}$

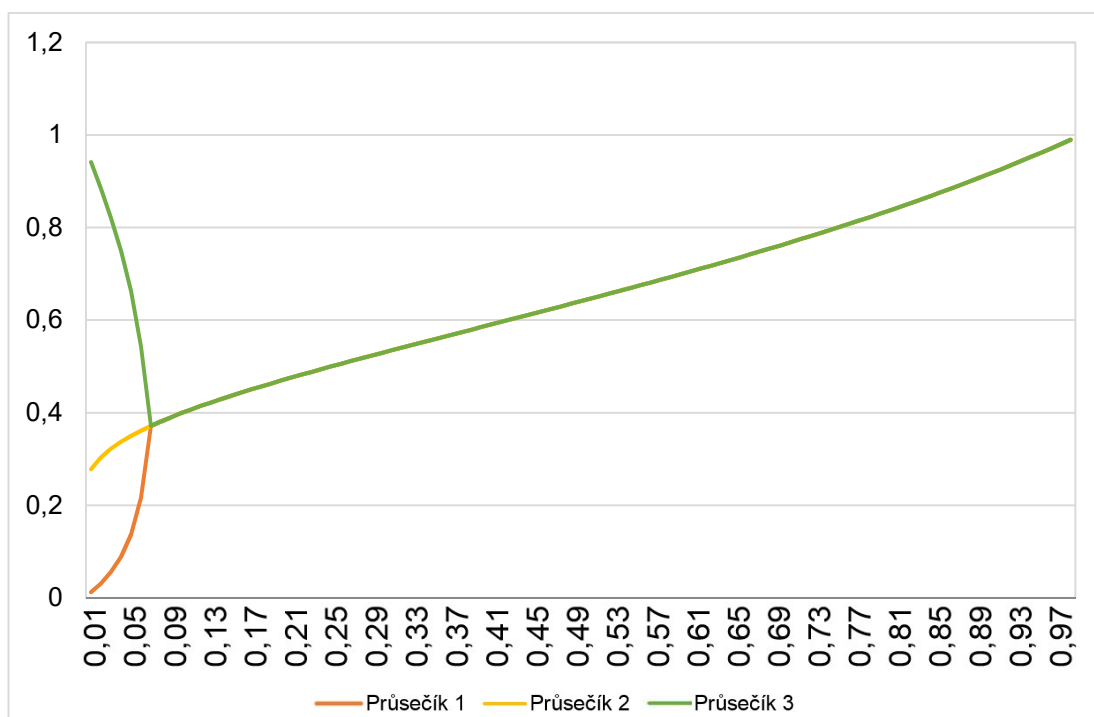
má právě dvě řešení pro $a \in (1; \sqrt[e]{e})$

má právě tři řešení pro $a \in (0; e^{-e})$

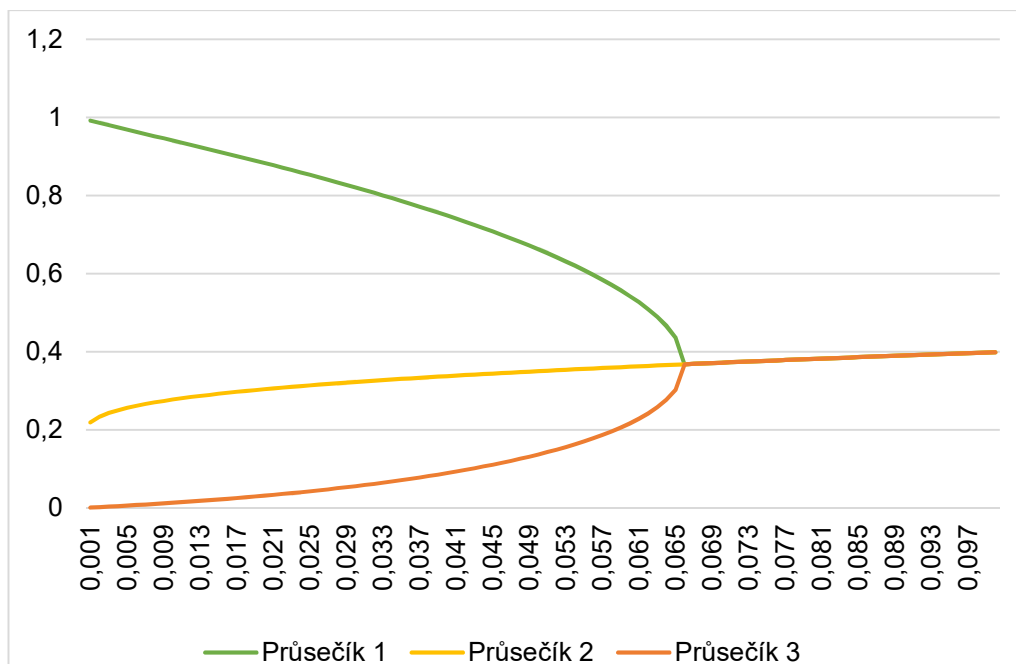
Můj výzkum tuto větu potvrdil a doplnil o vygenerovaná data.

Všechna získaná data jsem společně zpracoval v tabulce *shrnutí výsledků.xlsx*. a *průsečík.xlsx*. Z těchto souborů jsem zpracoval tabulky průsečíků do příloh 1, 2 a 3.

Grafy souřadnic průsečíků pro základy větší než 1 jsou v kapitole 3.4.



Obr. 21: Graf průsečíku pro základy od 0,01 do 0,99 po setinách



Obr. 22: Graf průsečíku pro základy od 0,001 do 0,1 po tisícinách

Závěr

Cílem práce bylo hledat průsečíky grafů exponenciální a logaritmické funkce o stejném základu a a popsat funkci závislosti souřadnic průsečíku na hodnotě základu a .

Vzhledem k překvapivým závěrům výzkumu a potřebě upřesnění výsledků bylo nutné původní aplikaci rozšířit. Získaná data jsem zpracoval v tabulkovém editoru Excel.

Výzkum dospěl k překvapivému zjištění, které je v rozporu s tím, jak bylo na tyto funkce doposud nahlíženo. Tento omezený pohled na vztah mezi exponenciální a logaritmickou funkcí je způsoben tím, že při zkoumání těchto funkcí se obvykle omezujeme na „hezké“ základy, jako např. 2, $\frac{1}{2}$ nebo e .

Potěšilo mne, že jsem mohl opět otevřít téma, které jsem, vzhledem k závěrům loňské práce, považoval za uzavřené. Upozornění na výše uvedený článek mi ukázalo nový směr výzkumu.

Literatura a zdroje

1. Příspěvatelé Wikipedie, Wolfram Alpha [online], Wikipedie: Otevřená encyklopedie, 2016, Datum poslední revize 7. 12. 2016, 05:58 UTC, [citováno 8. 04. 2018] https://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Wolfram_Alpha&oldid=14427420

2. Nikola Koceić Bilan, Ivan Jelić; On intersections of the exponential and logarithmic curves; Annales Mathematicae et Informaticae, ročník 43, 2014, strany 159-170, viz příloha 5

Obrázky č. 1-4 jsou vygenerovány v sešitech editoru Excel, autor Petr Švarc [online], <https://svapet.webnode.cz/mtematika/grafy-funkci-excel/>

Obrázky č. 5, 12-14 jsou vygenerovány v odpovídacím stroji Wolfram Alpha [online] <https://www.wolframalpha.com/>

Příloha 1

Tabulka průsečíků pro základy od 0,01 do 0,99 po setinách

a	Průsečík 1		Průsečík 2		Průsečík 3	
	x	y	x	y	x	y
0,01	0,01309253	0,941488327	0,27798743	0,27798743	0,941488327	0,013092523
0,02	0,03146157	0,884194352	0,30420452	0,30420452	0,884194352	0,031461565
0,03	0,05613297	0,821327365	0,32261916	0,32261916	0,821327365	0,056132969
0,04	0,08960085	0,749451248	0,33747076	0,33747076	0,749451248	0,089600847
0,05	0,1373594	0,66266083	0,35022486	0,35022486	0,66266083	0,137359399
0,06	0,21689807	0,543229523	0,36157981	0,36157981	0,543229523	0,21689807
0,07	0,37192833	0,371928315	0,37192833	0,37192833	0,371928315	0,37192833
0,08	0,38151534	0,381515339	0,38151534	0,38151534	0,381515339	0,38151534
0,09	0,39050495	0,390504932	0,39050495	0,39050495	0,390504932	0,390504949
0,1	0,39901298	0,399012977	0,39901298	0,39901298	0,399012977	0,39901298
0,11	0,40712462	0,407124615	0,40712462	0,40712462	0,407124615	0,40712462
0,12	0,41490451	0,414904501	0,41490451	0,41490451	0,414904501	0,414904509
0,13	0,42240302	0,422403002	0,42240302	0,42240302	0,422403002	0,422403018
0,14	0,42966025	0,429660232	0,42966025	0,42966025	0,429660232	0,429660247
0,15	0,43670873	0,436708716	0,43670873	0,43670873	0,436708716	0,436708728
0,16	0,44357526	0,443575259	0,44357526	0,44357526	0,443575259	0,44357526
0,17	0,45028224	0,450282239	0,45028224	0,45028224	0,450282239	0,45028224
0,18	0,4568486	0,456848588	0,4568486	0,4568486	0,456848588	0,456848597
0,19	0,46329051	0,463290493	0,46329051	0,46329051	0,463290493	0,463290506
0,2	0,46962193	0,469621918	0,46962193	0,46962193	0,469621918	0,469621927
0,21	0,47585502	0,475855013	0,47585502	0,47585502	0,475855013	0,475855018
0,22	0,48200045	0,482000442	0,48200045	0,48200045	0,482000442	0,482000448
0,23	0,48806764	0,488067637	0,48806764	0,48806764	0,488067637	0,488067639
0,24	0,49406499	0,494064982	0,49406499	0,49406499	0,494064982	0,494064988
0,25	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
0,26	0,50587946	0,505879445	0,50587946	0,50587946	0,505879445	0,505879455
0,27	0,51170947	0,511709469	0,51170947	0,51170947	0,511709469	0,51170947
0,28	0,51749564	0,517495636	0,51749564	0,51749564	0,517495636	0,517495639
0,29	0,52324307	0,523243061	0,52324307	0,52324307	0,523243061	0,523243067
0,3	0,52895645	0,528956447	0,52895645	0,52895645	0,528956447	0,528956449
0,31	0,53464013	0,534640125	0,53464013	0,53464013	0,534640125	0,534640128
0,32	0,54029813	0,540298123	0,54029813	0,54029813	0,540298123	0,540298127
0,33	0,5459342	0,545934189	0,5459342	0,5459342	0,545934189	0,545934196
0,34	0,55155184	0,551551836	0,55155184	0,55155184	0,551551836	0,551551838
0,35	0,55715436	0,557154347	0,55715436	0,55715436	0,557154347	0,557154354
0,36	0,56274485	0,562744835	0,56274485	0,56274485	0,562744835	0,562744843
0,37	0,56832625	0,568326236	0,56832625	0,56832625	0,568326236	0,568326244
0,38	0,57390135	0,57390134	0,57390135	0,57390135	0,57390134	0,573901346
0,39	0,57947281	0,579472805	0,57947281	0,57947281	0,579472805	0,579472808
0,4	0,58504318	0,585043168	0,58504318	0,58504318	0,585043168	0,585043174

0,41	0,59061488	0,590614879	0,59061488	0,59061488	0,590614879	0,59061488
0,42	0,59619028	0,596190277	0,59619028	0,59619028	0,596190277	0,596190278
0,43	0,60177164	0,601771633	0,60177164	0,60177164	0,601771633	0,601771636
0,44	0,60736115	0,607361148	0,60736115	0,60736115	0,607361148	0,607361149
0,45	0,61296096	0,612960953	0,61296096	0,61296096	0,612960953	0,612960956
0,46	0,61857314	0,618573133	0,61857314	0,61857314	0,618573133	0,618573136
0,47	0,62419973	0,624199723	0,62419973	0,62419973	0,624199723	0,624199726
0,48	0,62984272	0,62984272	0,62984272	0,62984272	0,62984272	0,62984272
0,49	0,63550409	0,635504078	0,63550409	0,63550409	0,635504078	0,635504083
0,5	0,64118575	0,641185742	0,64118575	0,64118575	0,641185742	0,641185746
0,51	0,64688962	0,64688962	0,64688962	0,64688962	0,64688962	0,64688962
0,52	0,65261761	0,652617599	0,65261761	0,65261761	0,652617599	0,652617603
0,53	0,65837158	0,65837157	0,65837158	0,65837158	0,65837157	0,658371574
0,54	0,66415341	0,664153404	0,66415341	0,66415341	0,664153404	0,664153407
0,55	0,66996498	0,669964968	0,66996498	0,66996498	0,669964968	0,669964973
0,56	0,67580815	0,675808137	0,67580815	0,67580815	0,675808137	0,675808142
0,57	0,68168479	0,681684787	0,68168479	0,68168479	0,681684787	0,681684788
0,58	0,6875968	0,687596798	0,6875968	0,6875968	0,687596798	0,687596799
0,59	0,69354607	0,693546067	0,69354607	0,69354607	0,693546067	0,693546068
0,6	0,69953451	0,699534509	0,69953451	0,69953451	0,699534509	0,699534509
0,61	0,70556406	0,705564054	0,70556406	0,70556406	0,705564054	0,705564056
0,62	0,71163667	0,711636661	0,71163667	0,71163667	0,711636661	0,711636664
0,63	0,71775432	0,717754316	0,71775432	0,71775432	0,717754316	0,717754317
0,64	0,72391904	0,723919029	0,72391904	0,72391904	0,723919029	0,723919033
0,65	0,73013286	0,730132859	0,73013286	0,73013286	0,730132859	0,730132859
0,66	0,73639789	0,736397889	0,73639789	0,73639789	0,736397889	0,736397889
0,67	0,74271626	0,742716253	0,74271626	0,74271626	0,742716253	0,742716255
0,68	0,74909014	0,749090135	0,74909014	0,74909014	0,749090135	0,749090137
0,69	0,75552177	0,755521765	0,75552177	0,75552177	0,755521765	0,755521766
0,7	0,76201344	0,762013428	0,76201344	0,76201344	0,762013428	0,762013431
0,71	0,76856748	0,768567479	0,76856748	0,76856748	0,768567479	0,768567479
0,72	0,77518633	0,775186323	0,77518633	0,77518633	0,775186323	0,775186325
0,73	0,78187245	0,781872448	0,78187245	0,78187245	0,781872448	0,781872449
0,74	0,78862842	0,788628409	0,78862842	0,78862842	0,788628409	0,788628412
0,75	0,79545686	0,795456848	0,79545686	0,79545686	0,795456848	0,795456851
0,76	0,8023605	0,802360489	0,8023605	0,8023605	0,802360489	0,802360491
0,77	0,80934216	0,809342149	0,80934216	0,80934216	0,809342149	0,809342152
0,78	0,81640475	0,816404747	0,81640475	0,81640475	0,816404747	0,816404747
0,79	0,82355131	0,8235513	0,82355131	0,82355131	0,8235513	0,823551302
0,8	0,83078495	0,830784948	0,83078495	0,83078495	0,830784948	0,830784949
0,81	0,83810895	0,838108944	0,83810895	0,83810895	0,838108944	0,838108945
0,82	0,84552668	0,845526674	0,84552668	0,84552668	0,845526674	0,845526675
0,83	0,85304167	0,853041659	0,85304167	0,85304167	0,853041659	0,853041661
0,84	0,86065758	0,860657571	0,86065758	0,86065758	0,860657571	0,860657573
0,85	0,86837824	0,868378237	0,86837824	0,86837824	0,868378237	0,868378238

0,86	0,87620766	0,876207651	0,87620766	0,87620766	0,876207651	0,876207652
0,87	0,88415	0,884149992	0,88415	0,88415	0,884149992	0,884149993
0,88	0,89220963	0,892209628	0,89220963	0,89220963	0,892209628	0,892209628
0,89	0,90039114	0,900391135	0,90039114	0,90039114	0,900391135	0,900391135
0,9	0,90869932	0,908699312	0,90869932	0,90869932	0,908699312	0,908699313
0,91	0,9171392	0,917139198	0,9171392	0,9171392	0,917139198	0,917139198
0,92	0,92571609	0,925716083	0,92571609	0,92571609	0,925716083	0,925716084
0,93	0,93443554	0,934435538	0,93443554	0,93443554	0,934435538	0,934435538
0,94	0,94330343	0,943303427	0,94330343	0,94330343	0,943303427	0,943303427
0,95	0,95232594	0,952325934	0,95232594	0,95232594	0,952325934	0,952325935
0,96	0,9615096	0,96150959	0,9615096	0,9615096	0,96150959	0,961509591
0,97	0,9708613	0,970861298	0,9708613	0,9708613	0,970861298	0,970861298
0,98	0,98038837	0,980388361	0,98038837	0,98038837	0,980388361	0,980388361
0,99	0,99009853	0,990098523	0,99009853	0,99009853	0,990098523	0,990098523

Příloha 2

Tabulka průsečíků pro základy od 0,001 do 0,01 po tisícinách

a	Průsečík 1		Průsečík 2		Průsečík 3	
	x	y	x	y	x	y
0,001	0,00105126	0,992764457	0,21951316	0,21951316	0,992764457	0,001051252
0,002	0,00217395	0,986580607	0,23382992	0,23382992	0,986580607	0,002173945
0,003	0,00335607	0,980692925	0,24330964	0,24330964	0,980692925	0,003356067
0,004	0,00459314	0,974958042	0,25062304	0,25062304	0,974958042	0,004593134
0,005	0,00588281	0,969311751	0,25667489	0,25667489	0,969311751	0,005882807
0,006	0,00722379	0,963717691	0,26189029	0,26189029	0,963717691	0,007223789
0,007	0,0086154	0,958152545	0,26650566	0,26650566	0,958152545	0,008615395
0,008	0,01005734	0,952600188	0,2706671	0,2706671	0,952600188	0,01005734
0,009	0,01154964	0,947048537	0,27447168	0,27447168	0,947048537	0,011549638
0,01	0,01309253	0,941488327	0,27798743	0,27798743	0,941488327	0,013092523
0,011	0,01468641	0,93591216	0,28126404	0,28126404	0,93591216	0,014686408
0,012	0,01633187	0,930313746	0,28433897	0,28433897	0,930313746	0,01633187
0,013	0,01802962	0,924687774	0,28724123	0,28724123	0,924687774	0,018029616
0,014	0,01978048	0,919029649	0,28999378	0,28999378	0,919029649	0,019780474
0,015	0,02158539	0,913335248	0,29261511	0,29261511	0,913335248	0,021585388
0,016	0,02344542	0,907600735	0,29512039	0,29512039	0,907600735	0,023445418
0,017	0,02536173	0,901822618	0,29752217	0,29752217	0,901822618	0,025361726
0,018	0,02733559	0,895997596	0,29983103	0,29983103	0,895997596	0,027335584
0,019	0,02936837	0,890122541	0,30205592	0,30205592	0,890122541	0,029368366
0,02	0,03146157	0,884194352	0,30420452	0,30420452	0,884194352	0,031461565
0,021	0,03361678	0,878210075	0,30628346	0,30628346	0,878210075	0,033616778
0,022	0,03583573	0,872166712	0,3082985	0,3082985	0,872166712	0,035835729
0,023	0,03812027	0,86606128	0,3102547	0,3102547	0,86606128	0,038120265
0,024	0,04047235	0,859890879	0,31215651	0,31215651	0,859890879	0,04047235

0,025	0,04289411	0,853652394	0,31400788	0,31400788	0,853652394	0,042894109
0,026	0,0453878	0,847342768	0,31581232	0,31581232	0,847342768	0,0453878
0,027	0,04795585	0,840958793	0,31757298	0,31757298	0,840958793	0,047955847
0,028	0,05060084	0,834497216	0,31929267	0,31929267	0,834497216	0,050600837
0,029	0,05332555	0,827954608	0,32097396	0,32097396	0,827954608	0,053325549
0,03	0,05613297	0,821327365	0,32261916	0,32261916	0,821327365	0,056132969
0,031	0,0590263	0,814611736	0,32423036	0,32423036	0,814611736	0,059026296
0,032	0,06200896	0,807803824	0,32580948	0,32580948	0,807803824	0,062008958
0,033	0,06508467	0,800899401	0,32735826	0,32735826	0,800899401	0,065084669
0,034	0,06825743	0,79389401	0,32887833	0,32887833	0,79389401	0,068257426
0,035	0,07153153	0,786782986	0,33037114	0,33037114	0,786782986	0,071531529
0,036	0,07491167	0,779561189	0,33183807	0,33183807	0,779561189	0,074911667
0,037	0,0784029	0,772223232	0,33328038	0,33328038	0,772223232	0,078402897
0,038	0,08201073	0,76476326	0,33469922	0,33469922	0,76476326	0,082010729
0,039	0,08574119	0,757174889	0,33609567	0,33609567	0,757174889	0,085741189
0,04	0,08960085	0,749451248	0,33747076	0,33747076	0,749451248	0,089600847
0,041	0,09359691	0,741584861	0,3388254	0,3388254	0,741584861	0,09359691
0,042	0,09773734	0,733567442	0,34016047	0,34016047	0,733567442	0,097737337
0,043	0,10203089	0,72539001	0,3414768	0,3414768	0,72539001	0,102030889
0,044	0,10648731	0,717042545	0,34277514	0,34277514	0,717042545	0,10648731
0,045	0,11111746	0,708513933	0,34405622	0,34405622	0,708513933	0,111117459
0,046	0,11593348	0,69979182	0,3453207	0,3453207	0,69979182	0,115933479
0,047	0,12094906	0,690862284	0,34656923	0,34656923	0,690862284	0,120949059
0,048	0,12617969	0,681709629	0,34780239	0,34780239	0,681709629	0,126179689
0,049	0,13164304	0,672315974	0,34902076	0,34902076	0,672315974	0,13164304
0,05	0,1373594	0,66266083	0,35022486	0,35022486	0,66266083	0,137359399
0,051	0,14335225	0,652720536	0,35141519	0,35141519	0,652720536	0,14335225
0,052	0,14964905	0,642467436	0,35259224	0,35259224	0,642467436	0,149649049
0,053	0,15628219	0,631868985	0,35375645	0,35375645	0,631868985	0,15628219
0,054	0,16329044	0,620886217	0,35490825	0,35490825	0,620886217	0,163290439
0,055	0,17072073	0,609472057	0,35604805	0,35604805	0,609472057	0,170720729
0,056	0,17863092	0,597568472	0,35717622	0,35717622	0,597568472	0,178630919
0,057	0,18709365	0,585102678	0,35829315	0,35829315	0,585102678	0,18709365
0,058	0,19620235	0,571981084	0,35939917	0,35939917	0,571981084	0,196202349
0,059	0,20608062	0,558079951	0,36049461	0,36049461	0,558079951	0,20608062
0,06	0,21689807	0,543229523	0,36157981	0,36157981	0,543229523	0,21689807
0,061	0,22889867	0,527185692	0,36265506	0,36265506	0,527185692	0,22889867
0,062	0,24245663	0,509574115	0,36372064	0,36372064	0,509574115	0,24245663
0,063	0,25820178	0,489764827	0,36477684	0,36477684	0,489764827	0,25820178
0,064	0,27736307	0,46652875	0,36582392	0,36582392	0,46652875	0,27736307
0,065	0,30312399	0,436682271	0,36686213	0,36686213	0,436682271	0,30312399
0,066	0,36789171	0,367891709	0,36789171	0,36789171	0,367891709	0,36789171
0,067	0,36891291	0,368912898	0,36891291	0,36891291	0,368912898	0,36891291
0,068	0,36992593	0,36992593	0,36992593	0,36992593	0,36992593	0,36992593
0,069	0,37093101	0,370930992	0,37093101	0,37093101	0,370930992	0,37093101

0,07	0,37192833	0,371928315	0,37192833	0,37192833	0,371928315	0,37192833
0,071	0,3729181	0,372918086	0,3729181	0,3729181	0,372918086	0,3729181
0,072	0,37390051	0,373900493	0,37390051	0,37390051	0,373900493	0,37390051
0,073	0,37487574	0,374875723	0,37487574	0,37487574	0,374875723	0,37487574
0,074	0,37584396	0,375843957	0,37584396	0,37584396	0,375843957	0,37584396
0,075	0,37680536	0,376805345	0,37680536	0,37680536	0,376805345	0,37680536
0,076	0,37776008	0,377760073	0,37776008	0,37776008	0,377760073	0,37776008
0,077	0,37870829	0,378708285	0,37870829	0,37870829	0,378708285	0,37870829
0,078	0,37965014	0,379650137	0,37965014	0,37965014	0,379650137	0,37965014
0,079	0,38058578	0,380585771	0,38058578	0,38058578	0,380585771	0,38058578
0,08	0,38151534	0,381515339	0,38151534	0,38151534	0,381515339	0,38151534
0,081	0,38243897	0,382438966	0,38243897	0,38243897	0,382438966	0,38243897
0,082	0,3833568	0,383356785	0,3833568	0,3833568	0,383356785	0,383356799
0,083	0,38426895	0,384268932	0,38426895	0,38426895	0,384268932	0,384268949
0,084	0,38517554	0,385175534	0,38517554	0,38517554	0,385175534	0,38517554
0,085	0,3860767	0,386076699	0,3860767	0,3860767	0,386076699	0,3860767
0,086	0,38697255	0,38697254	0,38697255	0,38697255	0,38697254	0,38697255
0,087	0,38786319	0,387863181	0,38786319	0,38786319	0,387863181	0,387863189
0,088	0,38874873	0,388748726	0,38874873	0,38874873	0,388748726	0,38874873
0,089	0,38962928	0,389629279	0,38962928	0,38962928	0,389629279	0,38962928
0,09	0,39050495	0,390504932	0,39050495	0,39050495	0,390504932	0,390504949
0,091	0,39137582	0,391375803	0,39137582	0,39137582	0,391375803	0,391375819
0,092	0,39224199	0,392241983	0,39224199	0,39224199	0,392241983	0,39224199
0,093	0,39310356	0,393103558	0,39310356	0,39310356	0,393103558	0,39310356
0,094	0,39396063	0,393960611	0,39396063	0,39396063	0,393960611	0,393960629
0,095	0,39481326	0,394813254	0,39481326	0,39481326	0,394813254	0,39481326
0,096	0,39566156	0,39566155	0,39566156	0,39566156	0,39566155	0,395661559
0,097	0,3965056	0,396505594	0,3965056	0,3965056	0,396505594	0,3965056
0,098	0,39734547	0,397345456	0,39734547	0,39734547	0,397345456	0,397345469
0,099	0,39818124	0,398181223	0,39818124	0,39818124	0,398181223	0,398181239
0,1	0,39901298	0,399012977	0,39901298	0,39901298	0,399012977	0,39901298

Příloha 3

Tabulka průsečíků pro základy od 1,01 do 1,44 po setinách

a	x₁	x₂
1,01	1,01010153	651,10033535
1,02	1,02041239	285,53631460
1,03	1,03094250	174,66423051
1,04	1,04170242	122,61505221
1,05	1,05270346	92,87152856
1,06	1,06395773	73,82489459
1,07	1,07547821	60,68170706
1,08	1,08727886	51,11873495

1,09	1,09937472	43,87970538
1,10	1,11178202	38,22873286
1,11	1,12451828	33,70756893
1,12	1,13760253	30,01670932
1,13	1,15105541	26,95256241
1,14	1,16489942	24,37215691
1,15	1,17915912	22,17230050
1,16	1,19386139	20,27674567
1,17	1,20903576	18,62799993
1,18	1,22471478	17,18193703
1,19	1,24093440	15,90415533
1,20	1,25773455	14,76745839
1,21	1,27515966	13,75007532
1,22	1,29325948	12,83438020
1,23	1,31208989	12,00595480
1,24	1,33171401	11,25289232
1,25	1,35220352	10,56527264
1,26	1,37364031	9,93476183
1,27	1,39611857	9,35430257
1,28	1,41974737	8,81787202
1,29	1,44465413	8,32029006
1,30	1,47098897	7,85706536
1,31	1,49893065	7,42426993
1,32	1,52869452	7,01843472
1,33	1,56054347	6,63646035
1,34	1,59480349	6,27553751
1,35	1,63188627	5,93307176
1,36	1,67232320	5,60660587
1,37	1,71681863	5,29373035
1,38	1,76633738	4,99196554
1,39	1,82225799	4,69858288
1,40	1,88666331	4,41029280
1,41	1,96295583	4,12261106
1,42	2,05738817	3,82831274
1,43	2,18402923	3,51245272
1,44	2,39381175	3,12330672

Příloha 4

Tabulka průsečíků pro základy od 1,4401 do 1,4446

a	x1	x2
1,4401	2,39696266	3,11840946
1,4402	2,40015511	3,11347158
1,4403	2,40339052	3,10849165
1,4404	2,40667039	3,10346816
1,4405	2,40999633	3,09839952
1,4406	2,41337003	3,09328403
1,4407	2,41679330	3,08811988
1,4408	2,42026803	3,08290517
1,4409	2,42379628	3,07763785
1,4410	2,42738022	3,07231576
1,4411	2,43102218	3,06693655
1,4412	2,43472464	3,06149774
1,4413	2,43849028	3,05599666
1,4414	2,44232197	3,05043043
1,4415	2,44622281	3,04479596
1,4416	2,45019614	3,03908991
1,4417	2,45424557	3,03330864
1,4418	2,45837504	3,02744825
1,4419	2,46258882	3,02150445
1,4420	2,46689157	3,01547258
1,4421	2,47128839	3,00934753
1,4422	2,47578491	3,00312369
1,4423	2,48038730	2,99679487
1,4424	2,48510242	2,99035423
1,4425	2,48993787	2,98379414
1,4426	2,49490217	2,97710610
1,4427	2,50000487	2,97028057
1,4428	2,50525676	2,96330674
1,4429	2,51067007	2,95617238
1,4430	2,51625884	2,94886346
1,4431	2,52203921	2,94136382
1,4432	2,52802996	2,93365470
1,4433	2,53425315	2,92571403
1,4434	2,54073495	2,91751564
1,4435	2,54750681	2,90902809
1,4436	2,55460710	2,90021299
1,4437	2,56208343	2,89102275
1,4438	2,56999610	2,88139705
1,4439	2,57842343	2,87125758
1,4440	2,58747029	2,86049947

1,4441	2,59728275	2,84897664
1,4442	2,60807505	2,83647486
1,4443	2,62018468	2,82265664
1,4444	2,63420266	2,80693094
1,4445	2,65136326	2,78806352
1,4446	2,67541336	2,76230748

Příloha 5

Plné znění článku, zdroj č. 2, dostupný také na přiloženém CD jako *On intersection of the exponential and logarithmic curves.pdf*

Annales Mathematicae et Informaticae
43 (2014) pp. 159–170
<http://ami.ektf.hu>

On intersections of the exponential and logarithmic curves

Nikola Koceić Bilan, Ivan Jelić

Faculty of Science, Department of Mathematics, University of Split.
koceic@pmfst.hr

Submitted July 03, 2014 — Accepted November 08, 2014

Abstract

We consider the curves $y = a^x$ and $y = \log_a x$ and their intersecting points for various bases a . Although this problem belongs to the elementary calculus, it turns out that the problem of determining number of these points, for $a \in (0, 1)$, is overlooked, so far. We prove that this number can be 0, 1, 2 or, even, 3, depending on the base a .

Keywords: exponential function, inflection, stationary point, homeomorphism

MSC: 26A06, 26A09.

1. Introduction

We consider the problem of determining the number of intersecting points of the graphs of the functions $f(x) = a^x$ and $g(x) = \log_a x$ depending on the base a . This problem is reduced to the study of solutions of the system

$$\begin{cases} y = a^x \\ y = \log_a x \end{cases} \quad (1.1)$$

which is equivalent to the equation

$$a^x = \log_a x \quad (1.2)$$

depending on a , $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.

Although this problem belongs to the elementary calculus, usually, it was not considered in sufficient detail in the calculus courses on universities worldwide. Moreover, students of mathematics and many professional mathematicians are likely to think that these curves do not intersect, for $a > 1$, and meet at only one point, for $a \in (0, 1)$. This impression is caused by many calculus books, math teachers or professors who usually take nice bases $a = 2, e, 10..$ as standard examples for the exponential and logarithmic curves. However, in [1] and [2] can be found a solution of this problem for $a > 1$. However, for $a \in (0, 1)$, in [1] can be found an incorrect claim (Proposition 1) that the graphs $y = a^x$ and $y = \log_a x$ always meet at only one point. The author's conclusion seems correct at the first glance. Indeed, if we considered these curves for some standard bases $\frac{1}{2}, e^{-1} \dots$ or if we try to make a sketch of the graphs of the functions $f(x) = a^x$ and $g(x) = \log_a x$, $a \in (0, 1)$, the inference, suggested by the picture, would be the same. Unexpectedly, this is not the case. Counterexample which was a motivation for this work is the base $a = \frac{1}{16}$. Namely, it holds

$$\log_{\frac{1}{16}} \frac{1}{4} = \frac{1}{2}, \quad \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2},$$

$$\log_{\frac{1}{16}} \frac{1}{2} = \frac{1}{4}, \quad \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}.$$

This means that $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ and $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ are common points of the graphs of the functions $g(x) = \log_{\frac{1}{16}} x$ and $f(x) = (\frac{1}{16})^x$. Since the both curves must meet the line $y = x$ at the same point we infer that there are (at least) 3 intersecting points.

The main goal of this paper is to prove:

Theorem 1.1. *The equation (1.2):*

- has no solutions, provided $a \in (\sqrt[e]{e}, +\infty)$,*
- has exactly one solution, provided $a \in [\frac{1}{e^e}, 1) \cup \{\sqrt[e]{e}\}$,*
- has exactly two solutions, provided $a \in (1, \sqrt[e]{e})$,*
- has exactly three solutions, provided $a \in (0, \frac{1}{e^e})$.*

In order to eliminate any intuitive concluding and to avoid any possible ambiguity and incorrect inferences, which a shallow considering of the graphs might cause, we will conduct the proof of this theorem very strictly (in the mathematical sense). A necessary mathematical tool needed for the proof belongs to elementary calculus and to topology. We will split the proof of the theorem into two separate cases: $a > 1$ and $a < 1$. In the both cases we need the following corollary which is an immediate consequence of the Intermediate value theorem and some elementary facts of mathematical analysis (see e.g. [3]).

Corollary 1.2. *Let $u: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ be a continuous function such that $u(c)u(d) \leq 0$.*

- (i) If $u(c)u(d) < 0$, then u has at least one zero $x_0 \in (c, d)$.*
- (ii) If u is a strictly monotonic function, then u has exactly one zero $x_0 \in [c, d]$.*

Hereinafter, for a real function which is given by a formula we understand that the function domain is the (maximal) natural domain of that formula.

We will consider two (in)equations to be equivalent provided their solution sets coincide.

2. The case $a > 1$

The proof of this case can be given as an assignment to students of mathematics in some elementary courses. It is based on the following, several, auxiliary lemmata whose proofs we leave to the reader. Actually, proving of these claims could be a good exercise for students in higher classes of a secondary school, providing they have sufficiently ambitious math teacher.

Lemma 2.1. *If (x_0, y_0) is a solution of the system (1.1), for $a > 1$, then $x_0 = y_0$.*

Lemma 2.2. *If $a > 1$, the equation (1.2) is equivalent to the equation*

$$a^x = x, \quad (2.1)$$

and thus, the solution sets of (1.2) and (2.1) coincide with the set of zeros of the function $\chi_a(x) = a^x - x$.

Lemma 2.3. *If $a > 1$, the function χ_a is continuously differentiable. It is strictly decreasing on the interval $\langle -\infty, \frac{1}{\ln a} \ln(\frac{1}{\ln a}) \rangle$, while it is strictly increasing on the interval $\langle \frac{1}{\ln a} \ln(\frac{1}{\ln a}), +\infty \rangle$. It reaches the global minimum at the point $x_a^* = \frac{1}{\ln a} \ln(\frac{1}{\ln a})$.*

Lemma 2.4. *Let $a > 1$. Then the equation (1.2) has: no zeros if and only if $\chi_a(x_a^*) > 0$; a unique zero if and only if $\chi_a(x_a^*) = 0$; exactly two zeros if and only if $\chi_a(x_a^*) < 0$.*

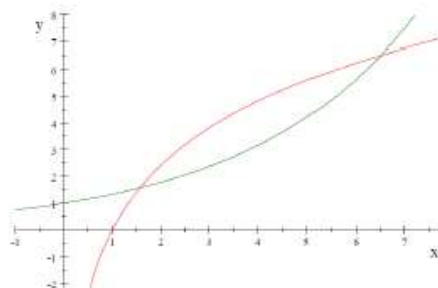
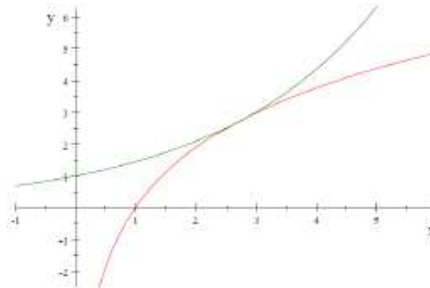
Let us interpret the previous result in term of the base a , i.e., how does a value $\chi_a(x_a^*)$ depend on a . Since the procedure is the same for all cases, it is sufficient to consider the case $\chi_a(x_a^*) < 0$. This is equivalent to $a^{x_a^*} < x_a^*$, which means

$$a^{\frac{1}{\ln a} \ln(\frac{1}{\ln a})} < \frac{1}{\ln a} \ln\left(\frac{1}{\ln a}\right).$$

Now, one obtains, in several steps, the following mutually equivalent inequalities

$$\begin{aligned} \frac{1}{\ln a} \ln\left(\frac{1}{\ln a}\right) \ln a &< \ln\left(\frac{1}{\ln a} \ln\left(\frac{1}{\ln a}\right)\right) \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{\ln a}\right) < \ln\left(\frac{1}{\ln a} \ln\left(\frac{1}{\ln a}\right)\right) \\ \frac{1}{\ln a} &< \frac{1}{\ln a} \ln\left(\frac{1}{\ln a}\right) \Leftrightarrow 1 < \ln\left(\frac{1}{\ln a}\right) \Leftrightarrow \ln a < e^{-1} \Leftrightarrow a < e^{e^{-1}}. \end{aligned}$$

Thus, the equation (1.2) has: exactly two solutions whenever $a \in \langle 1, \sqrt[e]{e} \rangle$, exactly one solution whenever $a = \sqrt[e]{e}$ (the solution is $x_0 = e$), no solutions whenever $a \in \langle \sqrt[e]{e}, +\infty \rangle$.

Example 2.5.(a) $a = \frac{4}{3}$ $y = a^x$, $y = \log_a x$ (b) $a = \sqrt[4]{e}$ $y = a^x$, $y = \log_a x$ **3. The case $0 < a < 1$**

Unlike the previous case, the proof of this case is rather nontrivial. In order to make this proof easier to follow, we will split it into nine simpler claims.

Lemma 3.1. *Let $0 < a < 1$. then the curve $y = a^x$ ($y = \log_a x$) and the line $y = x$ meet at a single point (ξ_a, ξ_a) , $\xi_a \in \langle 0, 1 \rangle$. The point ξ_a is the solution of the equation (1.2). The function $\zeta : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$, $\zeta(a) = \xi_a$, which assigns the point ξ_a to each base a , is an increasing homeomorphism whose inverse is given by the rule $a_\xi = \zeta^{-1}(\xi) = \xi^{\frac{1}{\xi}}$.*

Proof. Let λ be the real function given by $\lambda(x) = a^x - x$, for every $0 < a < 1$. Since $\lambda(0) = 1$ and $\lambda(1) < 0$, we may apply Corollary 1.2 on the function λ to infer that the curve $y = a^x$ intersects the line $y = x$. It remains to prove that they meet at exactly one point. Suppose that $(\xi, \xi = a^\xi)$ and $(\xi', \xi' = a^{\xi'})$ are two different intersection points. There is no loss of generality in assuming $\xi < \xi'$. Since the function a^x is strictly decreasing ($a < 1$) it follows that $a^\xi = \xi > \xi' = a^{\xi'}$, which is an obvious contradiction.

Given an $x \in \langle 0, 1 \rangle$, it is clear that, for $a = x^{\frac{1}{x}}$, it holds $a^x = x$. By examining limits $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{x}} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{x}} = 1$, and the first derivative $y' = x^{\frac{1}{x}} \frac{1 - \ln x}{x^2}$ of the function

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ x^{\frac{1}{x}}, & 0 < x < 1, \end{cases}$$

one infers that it is a strictly increasing mapping on the interval $[0, 1]$ and it maps the interval $[0, 1]$ onto itself. Therefore, it is a homeomorphism and its inverse restricted to the interval $\langle 0, 1 \rangle$ is the function $\zeta : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$, $\zeta(a) = \xi_a$, exactly as asserted. $\square$

Lemma 3.2. *If $0 < a < 1$, the solution set of the equation (1.2) is a nonempty subset of the interval $\langle 0, 1 \rangle$. If that set is finite, then its cardinality is odd.*

Proof. Let $0 < a < 1$. Then, obviously, since the equation (1.2) is defined only for $x > 0$, it has no solution on the interval $(-\infty, 0]$. Further, it holds that $a^x > 0$, $\log_a x \leq 0$, for every $x \in [1, +\infty)$. Therefore, the equation (1.2) has no solution on the interval $[1, +\infty)$. Consequently, by Lemma 3.1, the solution set of (1.2) is a nonempty subset of the interval $(0, 1)$. Let us assume that (x_0, y_0) , $x_0 \neq y_0$, is an intersection point of the curves $y = a^x$ and $y = \log_a x$. Then, since these curves are mutually symmetric regarding the line $y = x$, they also meet at the point (y_0, x_0) . Therefore, if there are only finitely many intersecting points of these curves, the number of those points which do not belong to the line $y = x$ is even. Now the statement follows by Lemma 3.1. $\square$

Lemma 3.3. *If $0 < a < 1$, the solution set of the equation (1.2) coincides with the solution set of the equation*

$$a^{a^x} = x, \quad (3.1)$$

i.e., it coincides with the set of zeros of the real function $H_a(x) = a^{a^x} - x$.

Proof. Notice that there are no solution of (3.1) outside of the domain $(0, \infty)$ of the equation (1.2). Because of the injectivity of the exponential function, it is clear that (1.2) is equivalent to (3.1). $\square$

Let us examine the functions $H_a(x) = a^{a^x} - x$ and $\varphi_a(x) = a^{a^x}$ which are, obviously, both continuously differentiable.

Lemma 3.4. *Let $0 < a < 1$. The function φ_a is strictly increasing, and the lines $y = 1$ and $y = 0$ are its horizontal asymptotes (from the right side and left side, respectively). The functions φ_a and H_a are convex on the interval $(-\infty, \bar{x}_a)$, and the both are concave on the interval $(\bar{x}_a, \infty)$, where*

$$\bar{x}_a = \log_a \log_a e^{-1}$$

is the common inflection point satisfying $\varphi_a(\bar{x}_a) = e^{-1}$.

Proof. Since $0 < a < 1$, it holds that $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^{a^x} = a^0 = 1$ and $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^{a^x} = a^\infty = 0$. Hence, the lines $y = 1$ and $y = 0$ are horizontal asymptotes of the function φ_a indeed.

Since, $\varphi'_a(x) = a^{a^x} a^x \ln^2 a > 0$, for every $x \in \mathbb{R}$, it follows that φ_a is strictly increasing. Further,

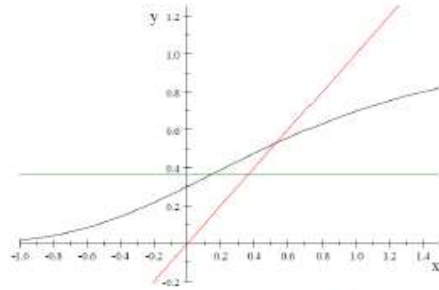
$$\begin{aligned} H''_a(x) &= \varphi''_a(x) = a^{a^x} a^x (\ln^2 a) a^x \ln^2 a + a^{a^x} a^x \ln^3 a = \\ &= \varphi''_a(x) = \underbrace{a^{a^x+x} \ln^3 a}_{>0} (a^x \ln a + 1). \end{aligned}$$

Therefore, $H''_a(x) = 0$ ($\varphi''_a(x) = 0$) if and only if $a^x \ln a + 1 = 0$. Consequently,

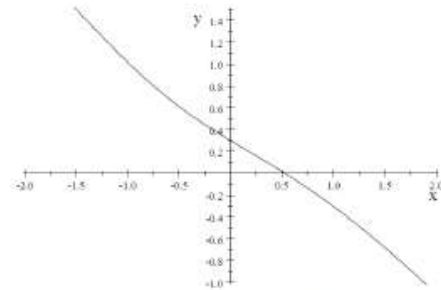
$$\bar{x}_a = \frac{1}{\ln a} \ln\left(\frac{-1}{\ln a}\right) = \log_a \log_a e^{-1} \text{ and } \varphi_a(\bar{x}_a) = a^{a^{\log_a \log_a e^{-1}}} = e^{-1}.$$

Now, it is trivial to check that $H''_a(x) = \varphi''_a(x) > 0$, for every $x \in (-\infty, \bar{x}_a)$ and $H''_a(x) = \varphi''_a(x) < 0$, for every $x \in (\bar{x}_a, \infty)$, which completes the proof. $\square$

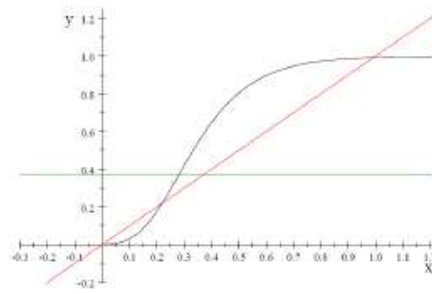
In the figures below, the graphs of the functions φ_a and H_a , for several bases a , $0 < a < 1$, are shown. In order to emphasize the inflection $(\bar{x}_a, e^{-1})$ and solutions of the equation (3.1), the graph of the function φ_a is presented along with the lines $y = x$ and $y = e^{-1}$.



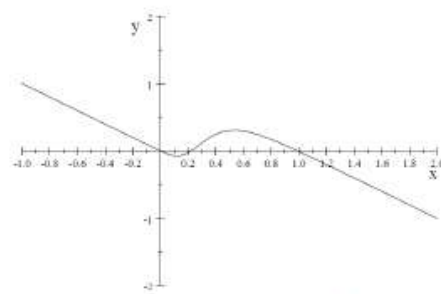
(a) $\varphi_{a=0.3}(x) = 0.3^{0.3^x}$



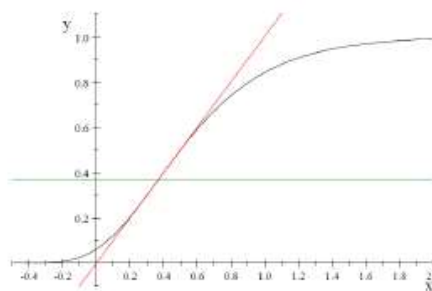
(b) $H_{a=0.3}(x) = 0.3^{0.3^x} - x$



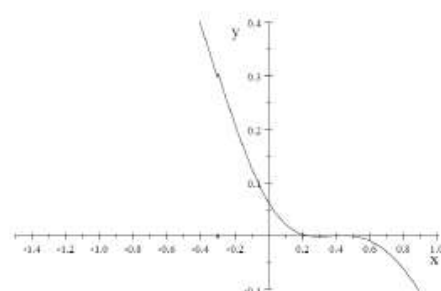
(a) $\varphi_{a=0.001}(x) = 0.001^{0.001^x}$



(b) $H_{a=0.001}(x) = 0.001^{0.001^x} - x$



(a) $\varphi_{a=\frac{1}{16}}(x) = \left(\frac{1}{16}\right)^{\left(\frac{1}{16}\right)^x}$



(b) $H_{a=\frac{1}{16}}(x) = \left(\frac{1}{16}\right)^{\left(\frac{1}{16}\right)^x} - x$

Lemma 3.5. *If $0 < a < 1$ the function H_a has at most two stationary points in*

the interval $\langle 0, 1 \rangle$, i.e., the equation

$$H'_a(x) = 0$$

has 0, 1 or 2 solutions in the interval $\langle 0, 1 \rangle$. If $a < e^{-1}$, H_a has at most two stationary points, while if $a \geq e^{-1}$, H_a has at most one stationary point.

Proof. First,

$$H'_a(x) = 0 \text{ if and only if } a^{a^x} a^x \ln^2 a - 1 = 0.$$

Thus,

$$a^{a^x+x} = \frac{1}{\ln^2 a} \text{ if and only if } a^x + x = \frac{1}{\ln a} \ln\left(\frac{1}{\ln^2 a}\right).$$

We need to determine the number of solutions of the equation

$$a^x + x = \frac{1}{\ln a} \ln\left(\frac{1}{\ln^2 a}\right) \quad (3.2)$$

on the interval $\langle 0, 1 \rangle$. Given an $0 < a < 1$, let us define the real function u_a by $u_a(x) = a^x + x$. It holds $u'_a(x) = a^x \ln a + 1$. Now, one can easily verify that $u'_a(\bar{x}_a) = 0$, and conclude that the function u_a is strictly increasing on the interval $\langle \bar{x}_a, \infty \rangle$ and that it is strictly decreasing on the interval $\langle -\infty, \bar{x}_a \rangle$. Notice that

$$\bar{x}_a > 0 \text{ } (\bar{x}_a < 0) \text{ if and only if } a < e^{-1} \text{ } (a > e^{-1})$$

and that $\bar{x}_a = 0$ for $a = e^{-1}$. We infer that the function u_a reaches its global minimum at $\bar{x}_a$, and that

$$u_a(\bar{x}_a) = a^{\bar{x}_a} + \bar{x}_a = a^{\log_a \log_a e^{-1}} + \bar{x}_a = \frac{-1}{\ln a} + \bar{x}_a.$$

Hence, for $a = e^{-1}$ ($\bar{x}_a = 0$), we have $u(\bar{x}_a) = 1$.

Now, we infer that the number of intersection points of the curve $y = u_a(x)$, for $x \in \langle 0, 1 \rangle$, and the line $y = \frac{1}{\ln a} \ln\left(\frac{1}{\ln^2 a}\right)$ coincide with the number of solution of the equation (3.2) in the interval $\langle 0, 1 \rangle$. Thus, by assuming $a \geq e^{-1}$, we obtain the strict monotonicity of the restriction of function u_a to the interval $\langle 0, 1 \rangle$, which implies that there are only 0 or 1 intersection points. Suppose that $a < e^{-1}$. Then, since the function u_a is strictly decreasing on the interval $\langle 0, \bar{x}_a \rangle$ and strictly increasing on the interval $[\bar{x}_a, 1]$, there are 0, 1 or 2 intersection points. $\square$

Lemma 3.6. *If $0 < a < 1$, the equation (1.2) has either one or three solutions.*

Proof. If we assume that (1.2) has infinitely many solutions, then, by Lemmata 3.2 and 3.3, the function H_a has infinitely many zeros in the interval $\langle 0, 1 \rangle$. Now, by applying Rolle's theorem, one infers that H_a has infinitely many stationary points in $\langle 0, 1 \rangle$ which contradicts Lemma 3.5. Therefore, by Lemma 3.2, the number of solutions of the equation (1.2) is finite and odd. That number cannot exceed 3 because, by Rolle's theorem, in such a case the function H_a would have at least four stationary points in $\langle 0, 1 \rangle$ which is, according to Lemma 3.5, impossible. $\square$

Lemma 3.7. *Let $0 < a < 1$. If the equation (1.2) has three solutions, then it holds $a < e^{-e}$.*

Proof. If the equation (1.2) has 3 solutions then, by Lemmata 3.2, 3.3 and Rolle's theorem, the function H_a has at least two stationary points in $\langle 0, 1 \rangle$. Now, by Lemma 3.5, it follows that there are exactly two stationary points of the function H_a in $\langle 0, 1 \rangle$. It implies that the equation (3.2) has two solutions in $\langle 0, 1 \rangle$ and $a < e^{-1}$. Consequently, for $x \in \langle 0, 1 \rangle$, the line $y = \frac{1}{\ln a} \ln(\frac{1}{\ln^2 a})$ meets the curve $y = u_a(x)$ at exactly two points, which is equivalent to

$$u_a(\bar{x}_a) < \frac{1}{\ln a} \ln \left(\frac{1}{\ln^2 a} \right) < 1, \quad a \in \langle 0, e^{-1} \rangle. \quad (3.3)$$

We propose to find solutions of this system of inequalities, i.e., to solve the system (3.3) in the terms of a . Let us put

$$t = -\frac{1}{\ln a}. \quad (3.4)$$

Notice that this substitution defines a bijective correspondence between $a \in \langle 0, e^{-1} \rangle$ and $t \in \langle 0, 1 \rangle$. The replacement with t in (3.3) yields the system

$$t - t \ln t < -t \ln t^2 < 1, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle, \quad (3.5)$$

which we need to solve in terms of t . Now, from the first inequality $t - t \ln t < -t \ln t^2$, one obtains the following, mutually equivalent, inequalities

$$t < -t \ln t \Leftrightarrow t(1 + \ln t) < 0 \Leftrightarrow 1 + \ln t < 0 \Leftrightarrow t < e^{-1}.$$

Now, by (3.4), one infers that $-\frac{1}{\ln a} < e^{-1}$ which is equivalent to $\ln a < -e$. It follows that $a < e^{-e}$, which means that the solutions of the first inequality of the system (3.3) are all $a \in \langle 0, e^{-e} \rangle$.

Further, the second inequality $-t \ln t^2 < 1$ of the system (3.5) is equivalent to

$$-t \ln t < \frac{1}{2}, \quad (3.6)$$

which is fulfilled for every $t \in \langle 0, 1 \rangle$. Indeed, by examining the function $w(t) = -t \ln t$ and its derivative $w'(t) = -\ln t - 1$, one can straightforwardly verify that w reaches the global maximum at the point $t_0 = e^{-1}$. Therefore, $w(e^{-1}) = e^{-1} < \frac{1}{2}$ implies (3.6), for every $t \in \langle 0, 1 \rangle$. Consequently, the solutions of the second inequality of the system (3.3) are all $a \in \langle 0, e^{-1} \rangle$. Finally, the solution of the system (3.3) is the interval

$$\langle 0, e^{-e} \rangle = \langle 0, e^{-e} \rangle \cap \langle 0, e^{-1} \rangle. \quad \square$$

Lemma 3.8. *For every $a \in [e^{-e}, 1]$, the equation (1.2) has a unique solution. Especially, for $a = e^{-e}$ the solution is e^{-1} .*

Proof. By Lemma 3.6 and 3.7, it follows that, for $a \geq e^{-e}$, (1.2) has only one solution. According to Lemma 3.1, that solution is the point ξ_a such that $a^{\xi_a} = \xi_a = \log_a \xi_a$. Especially, for $a = e^{-e}$, it holds $\xi_a = e^{-1}$. Indeed, $(e^{-e})^{e^{-1}} = (e^{-e})^{\frac{1}{e}} = e^{-1}$. $\square$

Lemma 3.9. *If $a \in \langle 0, e^{-e} \rangle$, then the equation (1.2) has exactly three solutions.*

Proof. According to Lemma 3.6, for every $a \in \langle 0, e^{-e} \rangle$ the equation (1.2) has 1 or 3 solutions. Let us prove that the value of an inflection point $\bar{x}_a$ of the function H_a and φ_a ranges from 0 to e^{-1} , for every $a \in \langle 0, e^{-e} \rangle$. By using L'Hospital's rule, one easily evaluates the following limits:

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \bar{x}_a = \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\frac{-1}{\ln a})}{\ln a} = \left[\frac{\infty}{-\infty} \right] = \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{-\ln(a)(\frac{1}{\ln^2 a})^{\frac{1}{a}}}{\frac{1}{a}} = \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{-1}{\ln a} = 0,$$

$$\lim_{a \rightarrow e^{-e}} \bar{x}_a = \frac{1}{-e} \ln \frac{-1}{-e} = \frac{1}{e}.$$

We are claiming that the function $\nu : \langle 0, e^{-e} \rangle \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\nu(a) = \bar{x}_a = \frac{1}{\ln a} \ln \left(\frac{-1}{\ln a} \right),$$

is an increasing mapping. Indeed, from its first derivative

$$\nu'(a) = \frac{-1 - \ln(-\frac{a}{\ln a})}{a \ln^2 a},$$

one infers that

$$\nu'(a) > 0 \quad \text{if and only if} \quad -1 - \ln \left(-\frac{1}{\ln a} \right) > 0,$$

which is equivalent to

$$e^{-1} > -\frac{1}{\ln a} \Leftrightarrow \ln a < -e \Leftrightarrow a < e^{-e}.$$

Hence, $\nu'(a) > 0$, for every $a \in \langle 0, e^{-e} \rangle$. It follows that the function ν is an increasing and bijective mapping onto its image $\nu(\langle 0, e^{-e} \rangle) = \langle 0, e^{-1} \rangle$. Consequently, $\bar{x}_a < e^{-1}$, for every $a \in \langle 0, e^{-e} \rangle$. Now, by Lemma 3.4, it follows that $\bar{x}_a < \varphi_a(\bar{x}_a) = e^{-1}$, which implies that $H_a(\bar{x}_a) > 0$, for every $a \in \langle 0, e^{-e} \rangle$. On the other hand, it holds

$$H_a(1) = \varphi_a(1) - 1 = a^a - 1 < 0.$$

Therefore, by Corollary 1.2 and Lemma 3.3, there exists a solution x_1 of the equation (1.2), $a \in \langle 0, e^{-e} \rangle$, such that $x_1 \in (\bar{x}_a, 1)$. We propose to show that, beside x_1 , there exists another solution x_0 of (1.2), $a \in \langle 0, e^{-e} \rangle$, such that $x_0 < \bar{x}_a$. It

is sufficient to show that $\xi_a < \bar{x}_a$. First notice that $\xi_a < e^{-1}$. Indeed, since the function $\zeta : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$ is an increasing bijection, and

$$\zeta^{-1}(e^{-1}) = (e^{-1})^{\frac{1}{e-1}} = e^{-e},$$

by Lemma 3.1, it follows that $\zeta(\langle 0, e^{-e} \rangle) = \langle 0, e^{-1} \rangle$. Now, from $a^{\xi_a} = \xi_a < \frac{1}{e}$, it follows that

$$\log_a a^{\xi_a} = \xi_a = a^{\xi_a} > \log_a e^{-1},$$

which implies that

$$\log_a a^{\xi_a} = \xi_a < \log_a \log_a e^{-1} = \bar{x}_a.$$

Hence, if $a \in \langle 0, e^{-e} \rangle$, the equation (1.2) has two different solutions x_1 and ξ_a . Therefore, by Lemma 3.6, (1.2) has exactly three solutions. $\square$

Remark 3.10. Notice that the point (ξ_a, ξ_a) is the common intersection point of the curves $y = \varphi_a(x)$, $y = a^x$ and $y = \log_a x$. It is interesting to consider what is happening with the inflection point $(\bar{x}_a, \frac{1}{e})$ of φ_a and with the intersection point (ξ_a, ξ_a) , and how $\bar{x}_a$ is related to the ξ_a and other solutions of (1.2), depending on a base $a \in \langle 0, 1 \rangle$. By the proof of Lemma 3.9, it is clear that, for $a \in \langle 0, e^{-e} \rangle$, there exist three different solutions x_2 , ξ_a and x_1 of (1.2), such that

$$x_2 < \xi_a < \bar{x}_a < x_1.$$

By Lemma 3.1 and by the proof of Lemma 3.9, it follows that, while a ranges from 0 to e^{-e} , $\bar{x}_a$ and ξ_a tends from 0 to $\frac{1}{e}$. For $a = e^{-e}$, all the solutions and inflection merge into one point. Namely, $\xi_a = \bar{x}_a = \frac{1}{e}$ is the unique solution of (1.2), while the inflection point and intersection point coincide with the point $(\frac{1}{e}, \frac{1}{e})$. “After that”, for $a > e^{-e}$, they separate and $\bar{x}_a$ moves to the left and ξ_a moves to the right.

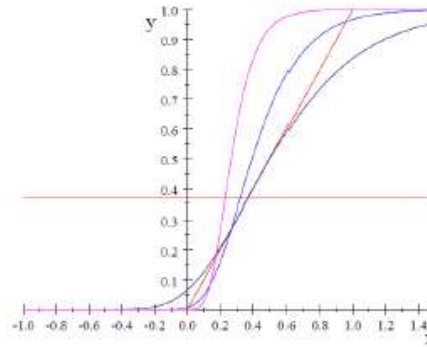


Figure 5: $y = x$, $y = \frac{1}{a}$, $y = \varphi_a(x)$, $a = e^{-10}, e^{-5}, e^{-e}$

If a ranges from e^{-e} to 1, since $\omega : \langle e^{-e}, 1 \rangle \rightarrow \langle -\infty, e^{-1} \rangle$ $\omega(a) = \bar{x}_a = \frac{1}{\ln a} \ln(\frac{-1}{\ln a})$, is a decreasing bijective mapping, it follows that $\omega(a) = \bar{x}_a$ tends

from e^{-1} to $-\infty$ and the unique solution ξ_a of (1.2), by Lemma 3.1, tends from e^{-1} to 1.

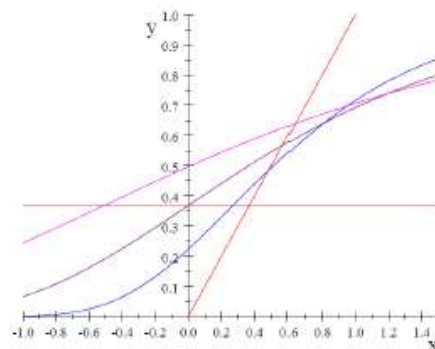


Figure 6: $y = x, y = \frac{1}{e}, y = \varphi_a(x), a = e^{-1.5}, e^{-1}, e^{-0.7}$

In the figures below an initial problem (1.1) is visualized for the bases $a = 0.3, \frac{1}{16}, 0.001$.

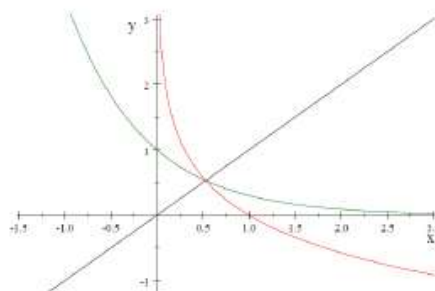


Figure 7: $a = 0.3, y = a^x, y = \log_a x$

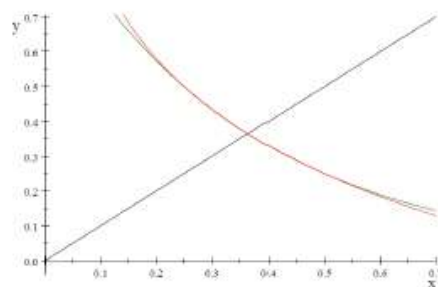


Figure 8: $a = \frac{1}{16}, y = a^x, y = \log_a x$

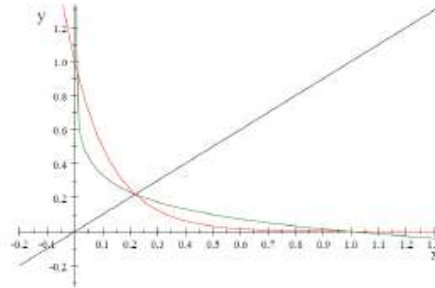


Figure 9: $a = 0.001$ $y = a^x$, $y = \log_a x$

The problem considered in this paper motivate us to study the equation

$$a^x = \log_b x,$$

for $a, b \in \langle 0, \infty \rangle \setminus \{1\}$ and to state the following problem:

Problem. Determine the number of all intersecting points of the curves $y = \log_b x$ and $y = a^x$ depending on bases a and b .

References

- [1] A. Boukas, T. Valahas, *Intersection of the exponential and logarithmic curves*, Australian Senior Mathematics Journal 23 (1), (2009) 5–8.
- [2] E. Couch, *An overlooked calculus question*, The College Mathematics Journal 33(5), (2002), 399–400.
- [3] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, Inc., 1976.