

STŘEDOŠKOLSKÁ ODBRONÁ ČINNOST

Obor SOČ: 1. Matematika a statistika

Průsečík exponenciální a logaritmické funkce pro základ od 0 do 1

Autor: Adam Hanuš

Škola: Střední škola spojů a informatiky Tábor, Bydlinkého 2474, 390 11

Kraj: Jihočeský kraj

Konzultant: Mgr. Jiřina Bartoňová

Tábor 2018

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou práci SOČ vypracoval samostatně a použil jsem pouze prameny uvedené v seznamu na konci práce. Prohlašuji, že tištěná verze a elektronická verze soutěžní práce jsou shodné. Nemám závažný důvod proti zpřístupňování této práce v souladu se zákonem č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) v platném znění.

v Táboře dne 10. 4. 2018

.....

Poděkování

Chtěl bych velmi poděkovat paní učitelce Mgr. Jiřině Bartoňové za odborné vedení práce, cenné rady a velikou investici volného času, které mi pomohly tuto práci zkompletovat.

Anotace

Cílem práce je najít průsečík grafů exponenciální a logaritmické funkce o stejném základu $a \in (0;1)$ a popsat funkci závislosti souřadnic průsečíku na hodnotě základu a .

Pro nalezení průsečíku je využívána vlastní aplikace v jazyce C#. Data jsou dále zpracována pomocí tabulkového editoru Excel do tabulek a grafů.

Výstupem jsou tabulky souřadnic průsečíku pro základy od 0,01 do 0,99 po setinách a tabulky pro základy od 0,001 do 0,1 po tisícinách. Na základě těchto tabulek jsou vytvořené grafy závislosti průsečíku na základu funkce.

Výzkum dospěl k překvapivému zjištění o hodnotách a počtu průsečíků pro základy menší než jisté číslo, včetně určení tohoto čísla.

Klíčová slova

exponenciální funkce; logaritmická funkce; graf funkce; tabulka funkčních hodnot; průsečík; Eulerovo číslo

Obsah

Úvod	6
1. Funkce	7
1.1. Exponenciální funkce	7
1.2. Logaritmická funkce	8
1.3. Funkce průsečík	9
2. Získávání dat	10
3. Zpracování dat	12
3.1. Zvláštní chování	12
3.2. Jiný způsob hledání průsečíku	15
3.3. Grafy funkcí pro malé zákady	17
3.4. Bod zlomu	19
4. Shrnutí výsledků	20
Závěr	22
Přílohy	24

Úvod

Cílem práce je hledat průsečík grafů exponenciální a logaritmické funkce o stejném základu $a \in (0;1)$ a popsat funkci závislosti souřadnic průsečíku na hodnotě základu a .

V hodinách matematiky jsme se zabývali exponenciální a logaritmickou funkcí. Bylo nám sděleno, že pro základ od 0 do 1 mají tyto funkce průsečík, nicméně jsme podrobněji neprobírali kde. Toto téma mne zajímalo, proto jsem hledal materiály, které by tento průsečík blíže popsaly. Žádné práce jsem nenašel a rozhodl jsem se tedy, že se budu tématem zabývat sám.

Plánuji napsat aplikaci v jazyce C#, která bude hledat pro hodnoty a průsečíky těchto funkcí. Získaná data chci převést a zpracovat v tabulkovém editoru Excel. Chtěl bych vytvořit tabulky souřadnic průsečíků pro základy od 0 do 1 s přesností minimálně na sedm desetinných míst. Získaná data chci znázornit také graficky.

Mám určitou představu, jak by průsečík mohl vypadat, ale zajímá mne, jaká je jeho skutečná podoba.

Kapitola 1

Funkce^[1]

V první kapitole si nejprve popíšeme, jak vypadají funkce, se kterými budeme pracovat.

1.1 Exponenciální funkce

Exponenciální funkce je taková funkce, která má neznámou x na místě exponentu. Exponenciální funkce je dána rovnicí

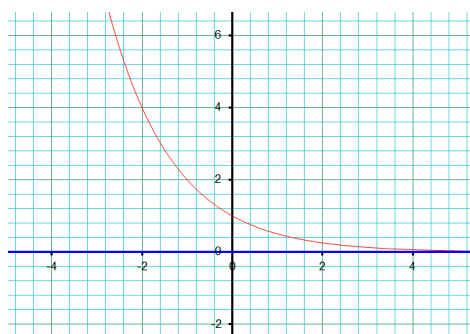
$$y = a^x, a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$$

Číslo a se nazývá základ a číslo x se nazývá exponent. Za a můžeme dosadit libovolné reálné číslo větší než 0 a různé od 1. Kdybychom dosadili za a číslo 1, získali bychom konstantní funkci, jelikož

$$1^a = 1$$

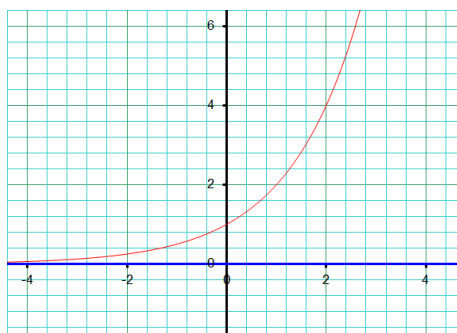
Aby x mohlo být reálné číslo, musí být základ $a > 0$

Grafem exponenciální funkce je exponenciální křivka, která se s osou y vždy protne v bodě 1. Pokud dosadíme za a jakékoliv číslo z intervalu $a \in (0,1)$, bude funkce klesající:



Obr. 1: klesající exponenciální funkce

A pokud dosadíme za a jakékoliv číslo z intervalu $a \in (1, \infty)$, bude funkce rostoucí:



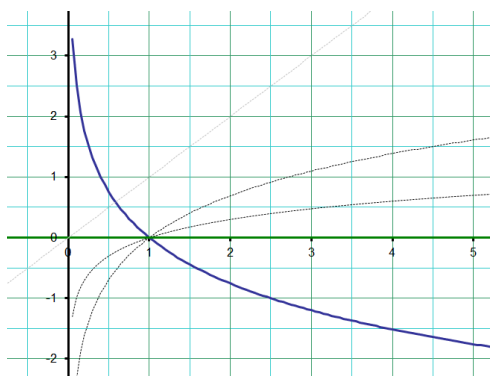
Obr. 2: rostoucí exponenciální funkce

1.2 Logaritmická funkce

Logaritmická funkce je inverzní funkce k exponenciální funkci. Funkční hodnota je logaritmus. Logaritmická funkce je dána rovnicí

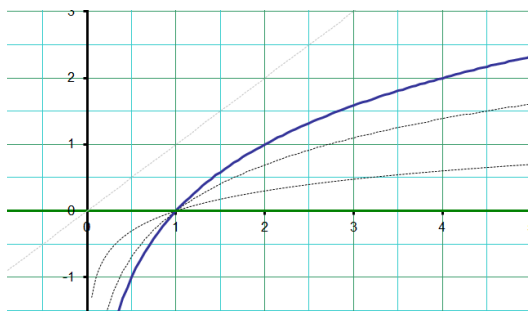
$$y = \log_a x, a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$$

Opět se nám graf protne vždy, tentokrát na ose x , v bodě 1. Znovu musíme rozlišovat interval základu, protože bude opět určovat, jestli bude funkce klesající, nebo rostoucí. Pokud tedy dosadíme za a jakékoliv číslo z intervalu $a \in (0,1)$, bude funkce klesající:



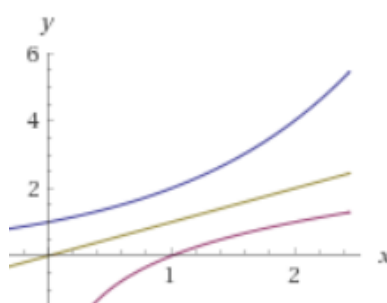
Obr. 3: klesající logaritmická funkce

A pokud dosadíme za a jakékoliv číslo z intervalu $a \in (1, \infty)$, bude funkce rostoucí:



Obr. 4: rostoucí logaritmická funkce

Vzhledem k tomu, že exponenciální a logaritmická funkce jsou inverzní, jsou jejich grafy souměrné podle osy I. a III. kvadrantu, tj. podle přímky $y=x$.



Obr. 5: Inverze. Modrá křivka je pro funkci $y=2^x$, žlutá křivka je pro funkci $y=x$ a fialová křivka je pro funkci $y=\log_2 x$.

1.3 Funkce průsečík

Vzhledem k vlastnostem exponenciální a logaritmické funkce očekávám, že průsečík bude ležet na přímce $y=x$ a s rostoucím základem a jeho hodnota poroste.

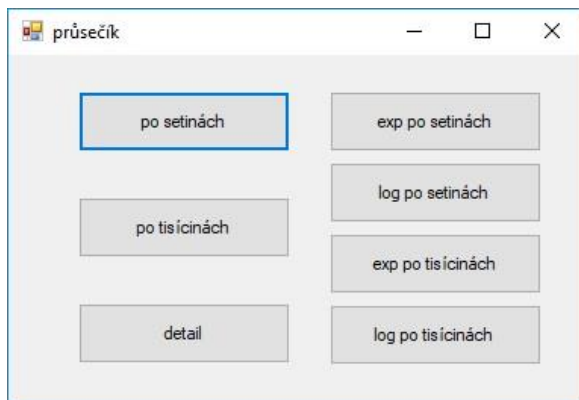
Hledaný průsečík je číslo $x \in \mathbb{R}$, $x \in (0; 1)$ a mělo by splňovat následující podmínku:

$$\log_a x = x = a^x$$

Kapitola 2

Získávání dat

Pro hledání hodnot průsečíku jsem si vytvořil jednoduchou aplikaci. Pro její vývoj jsem využil programovací jazyk C# a vývojové prostředí Microsoft Visual Studio 2015.



Obr. 6: uživatelské prostředí aplikace

Můj první pokus o hledání průsečíku byl založen na porovnávání hodnot exponenciální a logaritmické funkce pro daný základ a hledání bodu, ve kterém klesne hodnota logaritmu pod hodnotu exponenciální funkce. Vznikla tak metoda obsluhující tlačítko s textem „po setinách“.

Základem metody jsou dva do sebe vnořené cykly. Vnější cyklus je řízen proměnnou i , která mění po jedné hodnoty od 1 do 99. Při každém průchodu cyklem se vypočítá základ $a = \frac{i}{100}$. Ve vnitřním cyklu se proměnná x , která začíná na hodnotě a , dále zvětšuje po 10^{-8} . Cyklus probíhá, dokud je hodnota a^x menší, než hodnota $\log_a x$. Nalezené x je tedy nejmenší číslo z intervalu $(a;1)$, pro které je hodnota a^x větší nebo rovna $\log_a x$. Interval $(a;1)$ je pro hledání dostačující, protože $\log_a a = 1$ zatímco $a^x < 1$.

Výstupem metody je textový soubor s názvem *vystup_sto.txt*. V souboru je po řádcích zapsáno 99 čísel. Tato čísla jsou hledaná x pro základy od 0,01 do 0,99.

Po zpracování získaných hodnot v tabulkovém editoru Excel jsem zjistil překvapivé výsledky pro základ a menší než přibližně 0,07. Proto jsem se zaměřil na základy a po tisícinách od 0,001 do 0,1 a na základy od 0,06 do 0,07 po desetitisícinách. Vytvořil jsem tedy tlačítka s textem „po tisícinách“ a „detail“. Obě metody fungují pomocí stejného algoritmu, tedy hledáním bodu x , ve kterém logaritmická křivka klesne pod exponenciální. Metoda „detail“ navíc má o jedno desetinné místo větší přesnost, protože x se v cyklu mění o 10^{-9} .

Výstupem tlačítka „po tisícinách“ je textový soubor *vystup_tisic.txt*. V souboru je po řádcích zapsáno 100 čísel. Tato čísla jsou hledaná x pro základy od 0,001 do 0,1 po

jedné tisícíně. V souboru *vystup_detail.txt* je také sto čísel. Hledaná x jsou pro základy od 0,06 do 0,07 po jedné desetitisícíně.

Vzhledem k výše zmíněným zvláštním hodnotám pro malé základy jsem zvolil ještě jiný způsob hledání průsečíku. Hledal jsem průsečík funkce $y=a^x$ s funkcí $y=x$ a zvlášť průsečík funkce $y=\log_a x$ s funkcí $y=x$. Algoritmus je téměř stejný. Liší se jen podmínkou opakování vnitřního cyklu, která je $x < a^x$, respektive $x < \log_a x$.

Průsečíky jsem hledal pomocí čtyř metod, jejichž tlačítka jsou v pravém sloupci v okně aplikace. Hledal jsem jak po setinách pro a od 0,01 do 0,99, tak po tisícínách od 0,001 do 0,1. Výstupem jsou soubory *vystup_Exp_sto.txt* (exponenciální po setinách), *vystup_exp.txt* (exponenciální po tisícínách), *vystup_LOG_sto.txt* (logaritmická po setinách), *vystup_log.txt* (logaritmická po tisícínách).

Hodnoty ze všech vytvořených textových souborů jsem zkopíroval do tabulkového editoru v Excel, kde jsem je dále zpracoval. Tabulky jsou přiloženy jako přílohy práce.

Kapitola 3

Zpracování dat

V této kapitole je popsáno, jak byla získána a zpracována data, která jsou zkoumána a čím jsou zajímavá.

3.1 Zvláštní chování

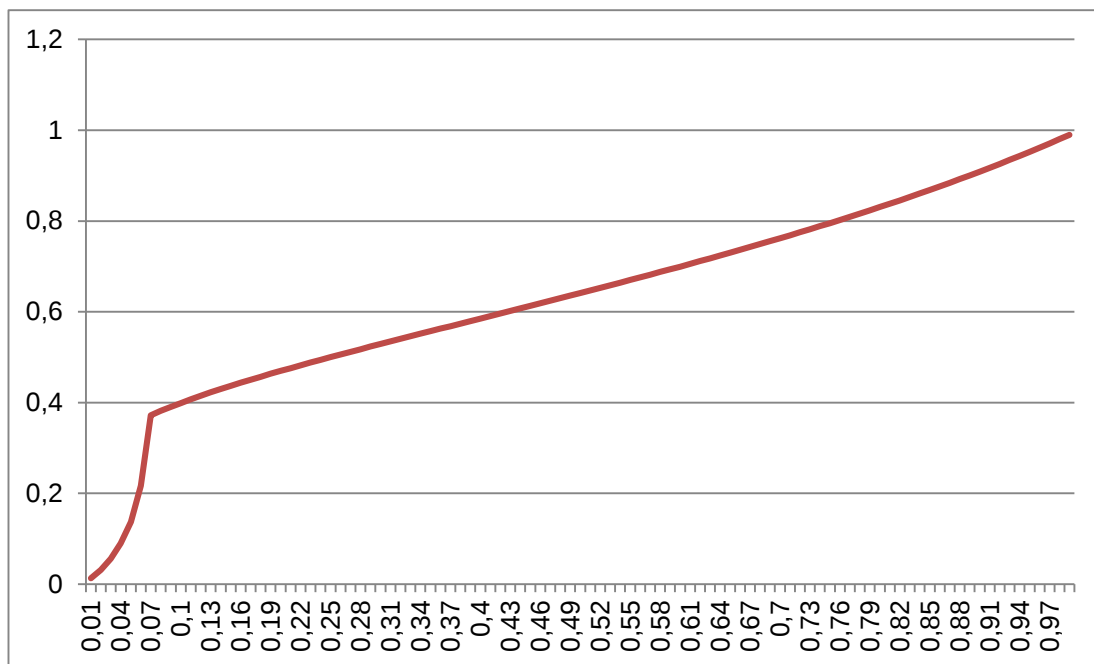
a	x	$\log_a x$	a^x
0,01	0,01309253	0,941488211	0,941488327
0,02	0,03146157	0,884194309	0,884194352
0,03	0,05613297	0,821327359	0,821327365
0,04	0,08960085	0,749451238	0,749451248
0,05	0,1373594	0,662660829	0,662660830
0,06	0,21689807	0,543229522	0,543229523
0,07	0,37192833	0,371928315	0,371928315
0,08	0,38151534	0,381515339	0,381515339
0,09	0,39050495	0,390504931	0,390504932
0,10	0,39901298	0,399012976	0,399012977
0,11	0,40712462	0,407124615	0,407124615
0,12	0,41490451	0,414904500	0,414904501

Tab. 1: Část zpracovaných dat

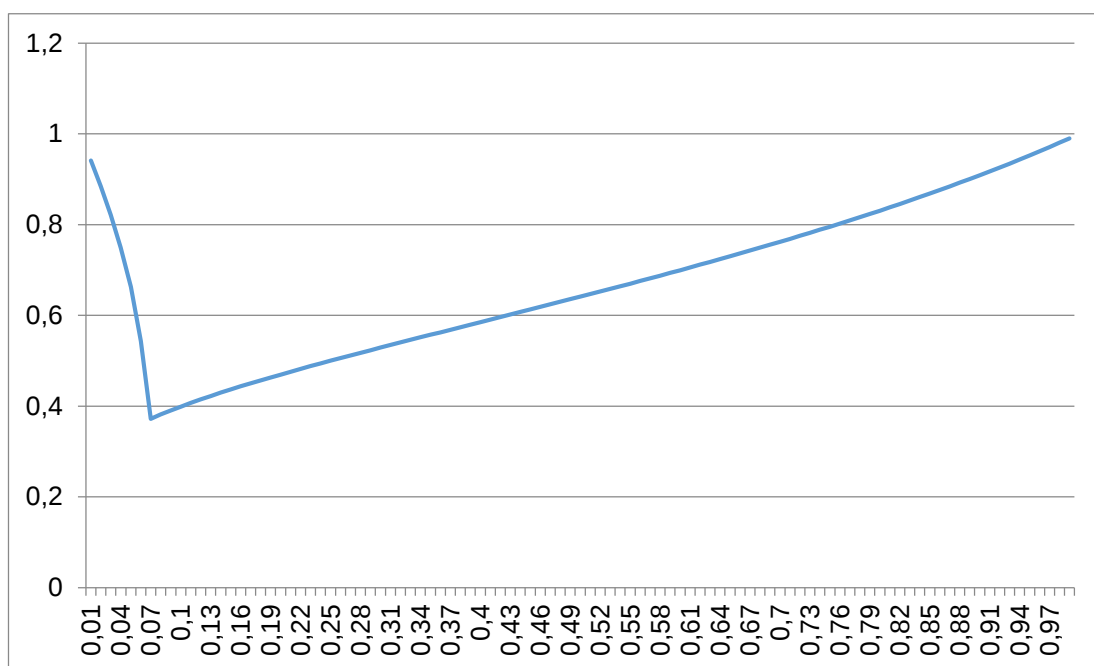
Hodnoty sloupce „x“ jsou vygenerované aplikací, tzn., jsou zkopírované ze souboru *vystup_sto.txt*. Můžeme si povšimnout, že přibližně do hodnoty $a=0,07$ jsou rozdíly mezi získaným x a funkčními hodnotami $\log_a x$ a a^x . Nesplňují tedy podmínku, definovanou v kap. 1.3, že: $\log_a x = x = a^x$. Vyšší základy tuto rovnici splňují, tzn., že se všechny hodnoty téměř shodují.

Ze zpracované tabulky jsem vytvořil grafy závislosti hledaného x na základu a a závislosti funkčních hodnot na základu a .

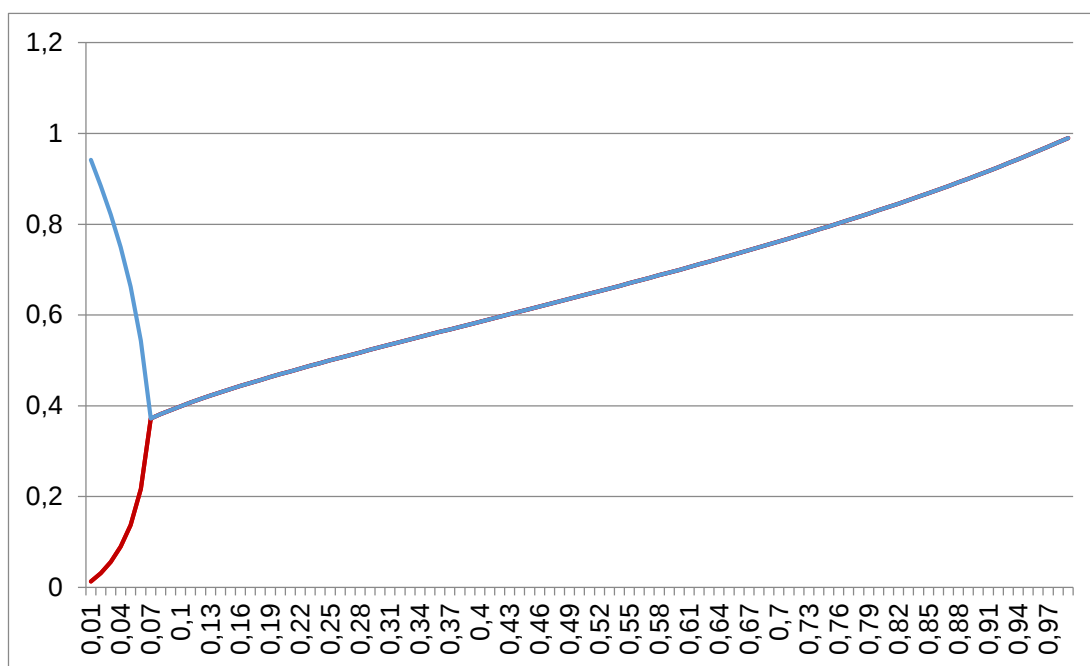
Celá tabulka a všechny grafy jsou v souboru *tabulky pro a do 0,99 po setinách.xlsx*



Obr. 7: hledané x pro $a \in \{0,01;0,99\}$; na vodorovné ose grafu, jsou základy a , na svislé ose jsou hodnoty hledaného x



Obr. 8: Funkční hodnoty x pro $a \in \{0,01;0,99\}$; na vodorovné ose grafu jsou základy a , na svislé ose jsou funkční hodnoty

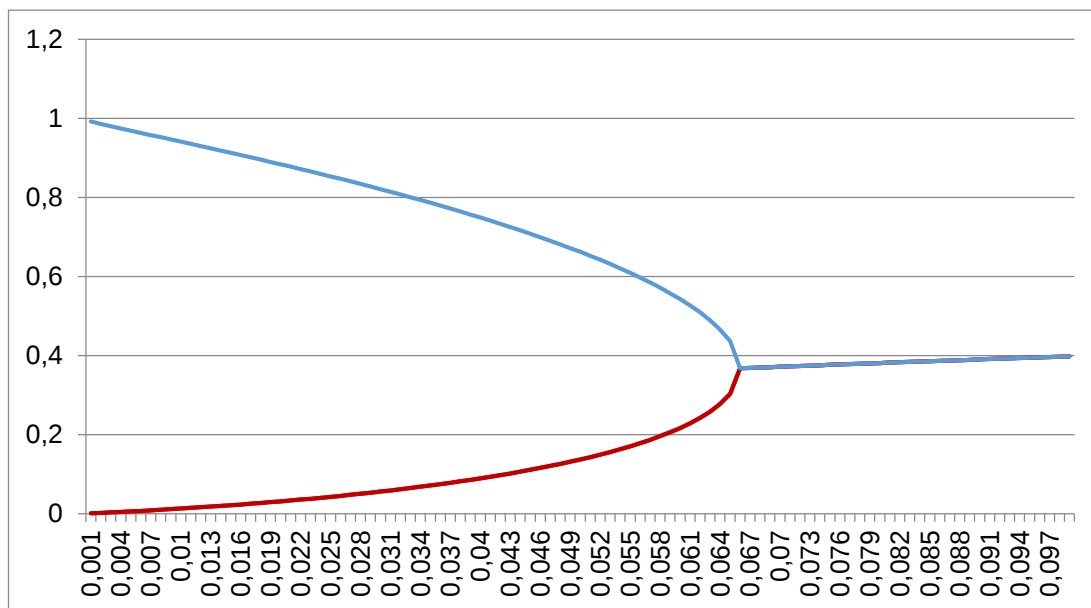


Obr. 9: Oba grafy sloučené do jednoho

Celá tabulka a všechny výše uvedené grafy jsou v souboru *tabulky pro a do 0,99 po setinách.xlsx*

Z grafů je vidět, že přibližně od $a=0,07$ křivky splynou.

Abych se ujistil, že zvláštní chování průsečíku pro $a < 0,07$ není způsobené chybnou interpretací malých čísel při výpočtech v aplikaci, rozšířil jsem aplikaci o výpočet pro základy od 0,001 do 0,1 po tisícinách. Vygenerovaný graf je velmi podobný obr. 9, ale detailněji zobrazuje oblast hledaného čísla.



Obr. 10: Grafy hledaného x a funkčních hodnot x pro $a \in (0,001; 0,1)$, sloučené do jednoho

Zpracovaná data jsou v souboru *tabulky pro a do 0,1 po tisícinách.xlsx*

3.2 Jiný způsob hledání průsečíku

Rozhodl jsem se pro výzkum jiným způsobem. Porovnával jsem hodnoty každé funkce (exponenciální a logaritmické) zvlášť s funkcí $y=x$, tedy tak, aby byly splněny podmínky.

$$\log_a x = x; a = x^x$$

V následujících tabulkách je možné vidět, že i pro základy $a < 0,07$ se hodnoty nalezené pro logaritmickou i exponenciální funkci shodují a zároveň splňují podmínku definovanou v kap. 1.3, tj.

$$\log_a x = x = ax$$

a	x	$\log_a x$
0,01	0,27798743	0,277987421
0,02	0,30420452	0,30420451
0,03	0,32261916	0,322619148
0,04	0,33747076	0,337470741
0,05	0,35022486	0,350224846
0,06	0,36157981	0,361579801
0,07	0,37192833	0,371928315
0,08	0,38151534	0,381515339
0,09	0,39050495	0,390504931
0,10	0,39901298	0,399012976
0,11	0,40712462	0,407124615
0,12	0,41490451	0,4149045

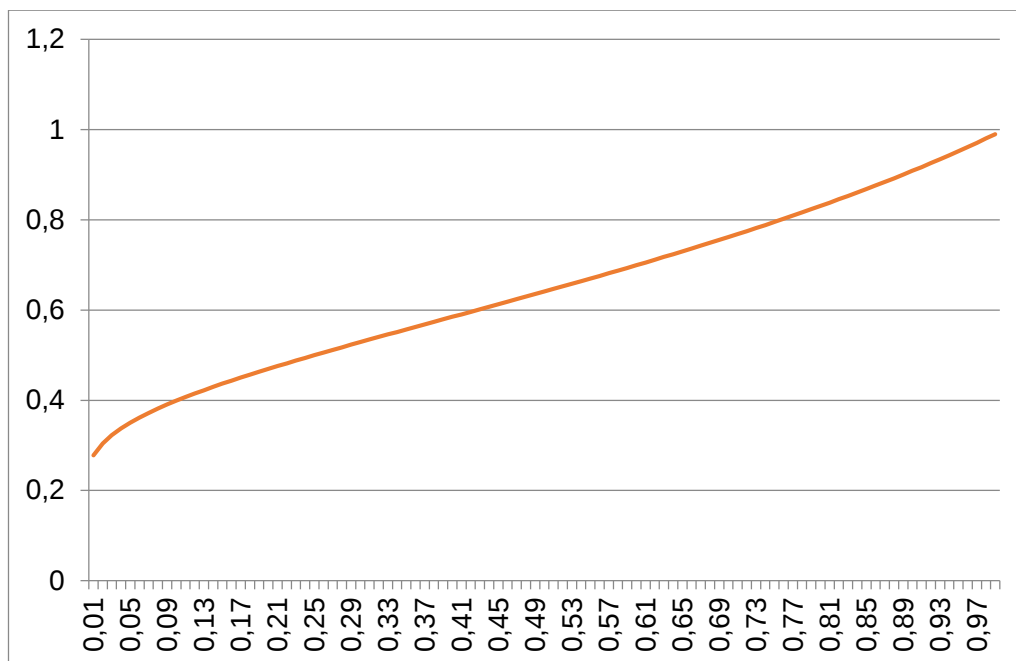
Tab. 2: Porovnávání x s hodnotami funkce $\log_a x$

a	x	a^x
0,01	0,27798743	0,277987418
0,02	0,30420452	0,304204508
0,03	0,32261916	0,322619147
0,04	0,33747076	0,337470739
0,05	0,35022486	0,350224845
0,06	0,36157981	0,361579801
0,07	0,37192833	0,371928315
0,08	0,38151534	0,381515339
0,09	0,39050495	0,390504932
0,1	0,39901298	0,399012977
0,11	0,40712462	0,407124615
0,12	0,41490451	0,414904501

Tab. 3: Porovnávání x s hodnotami funkce a^x

Kompletní tabulky a grafy jsou v souborech *porovnávání s x po setinách.xlsx* a *porovnávání s x po tisícínách.xlsx*.

Výsledky můžeme zobrazit v následujícím grafu. Data jsou čerpána z hodnot logaritmické funkce, nicméně hodnoty jsou totožné s hodnotami exponenciální funkce. Grafy by tedy vypadaly stejně.



Obr. 11: Hledané x , které splňuje podmínku na vodorovné ose grafu jsou základy a , na svislé ose jsou hodnoty hledaného x

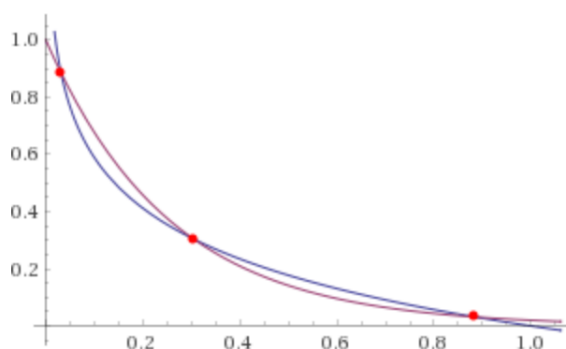
3.3 Grafy funkcí pro malé základy

Vzhledem k hodnotám z předchozích pozorování mě napadlo hledat řešení rovnice $\log_a x = a^x$ pomocí nástroje Wolfram Alpha.

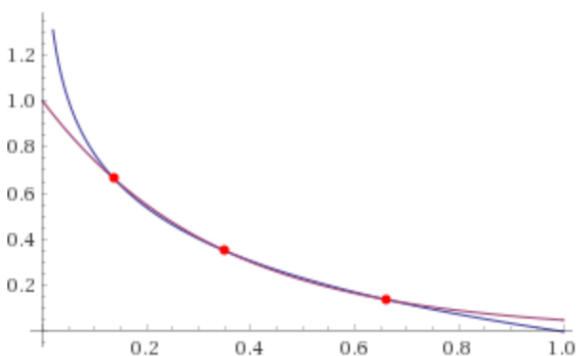
Wolfram Alpha je odpovídací stroj, vytvořený firmou Wolfram Research. Jde o službu, která se snaží přímo odpovídat na dotazy uživatele, na rozdíl od vyhledávacích služeb, které poskytnou pouze seznam stránek, pravděpodobně obsahujících odpověď. Wolfram Alpha je vytvořen na základě výpočetního softwaru Mathematica, který je využíván pro řešení algebraických úloh, numerických a statistických výpočtů, ale i vizualizaci výsledků. Odpověď na dotaz se zobrazí v člověku čitelné a přehledné formě. Často je přiložen i postup vedoucí k výsledku. ^[2]

Hledal jsem řešení výše zmíněné rovnice pro základy $a=0,02$; $0,05$; $0,07$. Zjistil jsem, že pro základy $a=0,02$; $0,05$ jsou průsečíky exponenciální a logaritmické funkce 3. Pro základ $a=0,07$ je průsečík pouze 1.

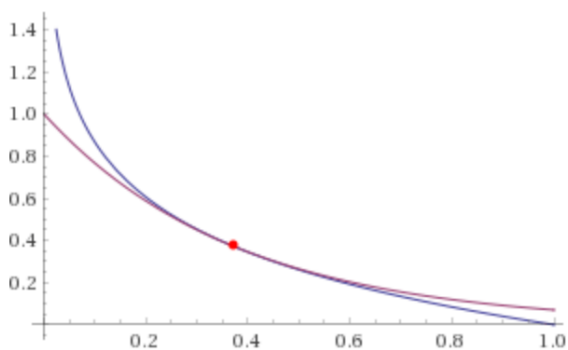
Následující grafy znázorňují zmíněné výsledky a potvrzují toto tvrzení.



Obr. 12: Graf funkcí $\log_{0,02} x$; $0,02^x$. Modrá křivka je pro logaritmickou funkci, fialová křivka je pro exponenciální funkci.



Obr. 13: Graf funkcí $\log_{0,05} x$; $0,05^x$. Modrá křivka je pro logaritmickou funkci, fialová křivka je pro exponenciální funkci.



Obr. 14: Graf funkcí $\log_{0,07} x$; $0,07^x$. Modrá křivka je pro logaritmickou funkci, fialová křivka je pro exponenciální funkci.

Pro srovnání jsem podobné grafy vytvořil také v tabulkovém editoru Excel. Výsledky jsou v souboru *grafy malých základů.xlsx*

3.4 Bod zlomu

Moje podezření, že pro základy menší, než jisté číslo mají exponenciální a logaritmická funkce tři průsečíky, se potvrdilo. Teď už jen zbývalo najít co nejpřesněji hodnotu základu, od které je průsečík jen jeden. Toto číslo jsem si nazval „bod zlomu“.

Z dat získaných pro základy po setinách vyplynulo číslo 0,07. Po prozkoumání intervalu $<0,001; 0,1>$ po tisícinách se hodnota upřesnila na 0,066. Pro ještě přesnější detekci „bodu zlomu“ jsem do aplikace přidal zkoumání detailu, tedy oblasti mezi hodnotami základu 0,06 a 0,07, a to po desetitisícinách.

a	x	$\log_a x$	a^x
0,0654	0,317535736	0,420633259	0,420633259
0,0655	0,321911098	0,415848306	0,415848306
0,0656	0,326787474	0,410562231	0,410562231
0,0657	0,332375867	0,404564028	0,404564028
0,0658	0,339097535	0,397432441	0,397432441
0,0659	0,348099381	0,388020565	0,388020565
0,066	0,36789171	0,367891709	0,367891709
0,0661	0,367994203	0,367994202	0,367994202
0,0662	0,368096613	0,368096612	0,368096612
0,0663	0,368198939	0,368198938	0,368198938
0,0664	0,368301182	0,368301181	0,368301181

Tab. 4: Část tabulky hodnot funkcí detailu

Kompletní tabulka je v souboru *detail pro a od 0,06 do 0,07.xlsx*

Z výše uvedené tabulky vyplývá, že hledaný základ je přibližně 0,0659. Pro základ $a=0,066$ se x a funkční hodnota obou funkcí shodují. Hledané x je přibližně 0,36789171.

Vzhledem k tomu, že pro exponenciální a logaritmickou funkci má zvláštní význam Eulerovo číslo, tedy číselná konstanta označovaná písmenem e , napadlo mě hledat souvislost mezi e a zjištěnými hodnotami.

Odhalit, že hledané x a funkční hodnoty obou funkcí by se mohly rovnat $\frac{1}{e}$, nebylo těžké. Se zkoumáním základu to už tak snadné nebylo. Metodou pokus – omyl jsem došel k číslu $\frac{1}{e^e}$, respektive e^{-e} .

Z výpočtu $(e^{-e})^{\frac{1}{e}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$ vyplývá, že musí platit i $\log_e e^{-e} \frac{1}{e} = \frac{1}{e}$.

Přibližná hodnota výše uvedených čísel podle Wolfram Alpha:

$$\frac{1}{e} = 0,36787944$$

$$e^{-e} = 0,06598803$$

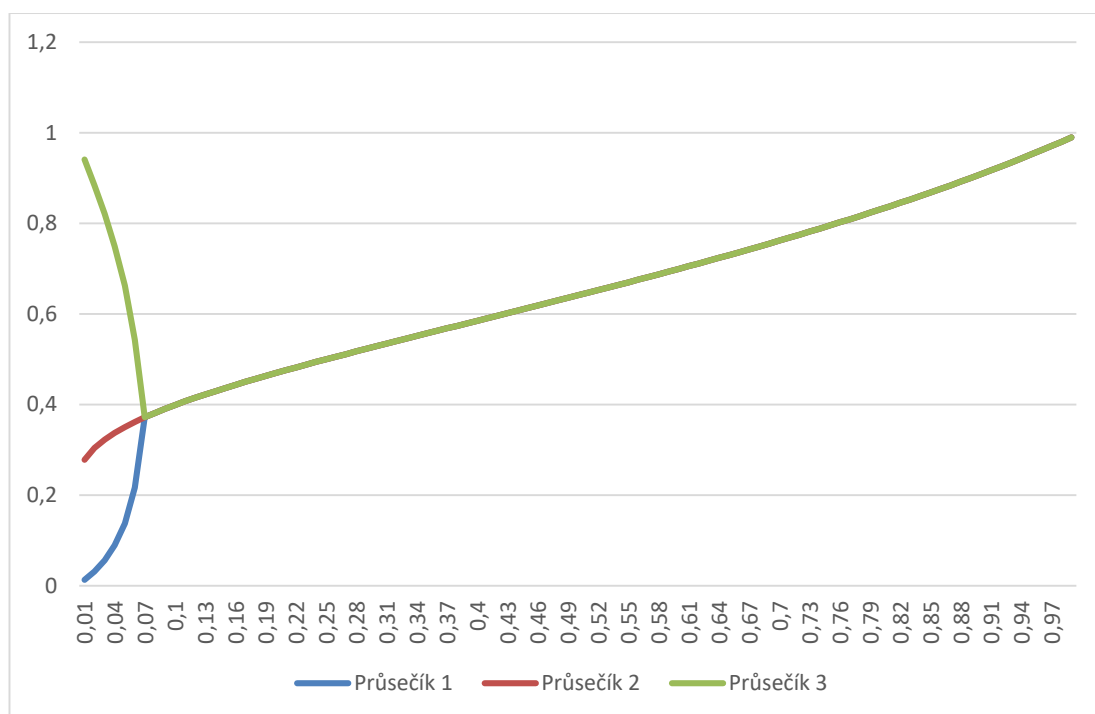
Kapitola 4

Shrnutí výsledků

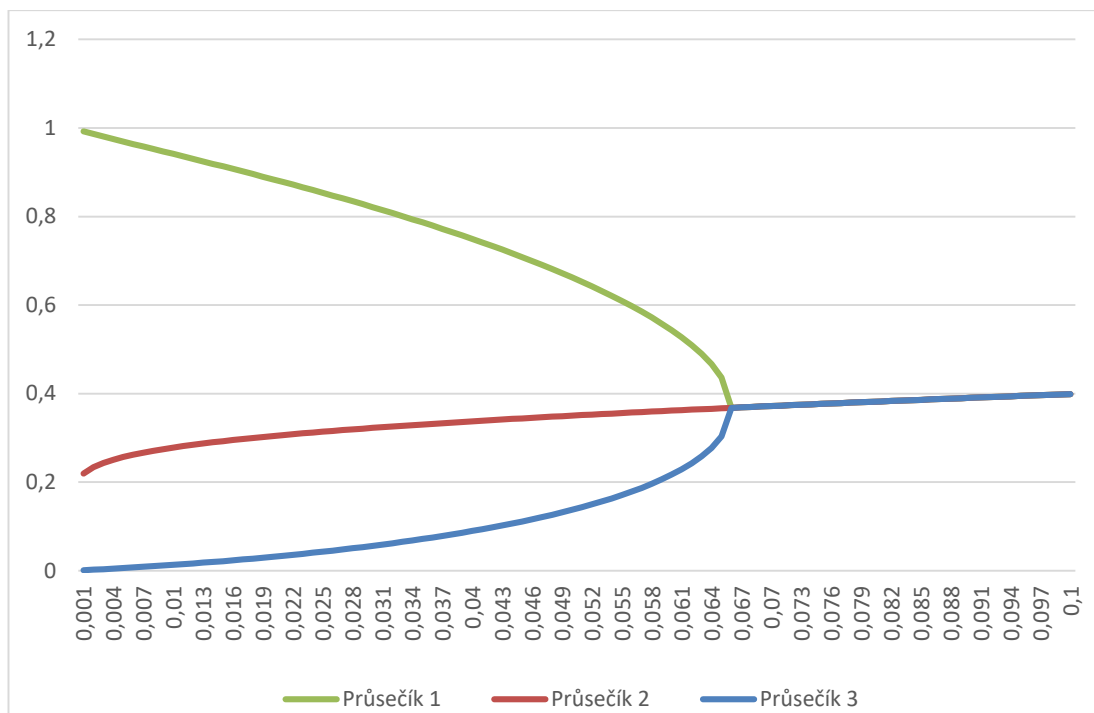
Došel jsem tedy k závěru, že pro základ $a < \frac{1}{e^e}$ jsou průsečíky exponenciální funkce tři. Od tohoto základu včetně a výš je průsečík jen jeden. Hodnota průsečíku pro tento základ, tedy pro $a = e^{-e}$, je $\frac{1}{e}$.

Všechna získaná data jsem společně zpracoval v tabulce *shrnutí výsledků.xlsx*. Z tohoto souboru jsem zpracoval tabulky průsečíků do přílohy 1.

Vzhledem k inverznosti exponenciální a logaritmické funkce nemusíme zkoumat souřadnice třetího průsečíku. První a třetí průsečík musí být body souměrné podle osy $y=x$.



Obr. 15: Graf průsečíků pro základny od 0,01 do 0,99 po setinách



Obr. 16: Graf průsečíků pro základy od 0,001 do 0,1 po tisícinách

Závěr

Cílem práce bylo hledat průsečík grafů exponenciální a logaritmické funkce o stejném základu $a \in (0;1)$ a popsat funkci závislosti souřadnic průsečíku na hodnotě základu a .

Vytvořil aplikaci v jazyce C#. Vzhledem k překvapivým závěrům výzkumu a potřebě upřesnění výsledků bylo nutné aplikaci rozšířit. Získaná data jsem zpracoval v tabulkovém editoru Excel.

Očekával jsem, že mnou hledaný průsečík bude odpovídat představě, kterou jsem získal v hodinách matematiky. Nalezení tří průsečíků a bodu zlomu bylo velkým překvapením nejen pro mě.

Výzkum mě velmi bavil a v průběhu se stal velmi napínavým.

Literatura a zdroje

1. ODVÁRKO, Oldřich. Matematika pro gymnázia. Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 1993. ISBN 80-7015-456-X.

2. Příspěvatelé Wikipedie, Wolfram Alpha [online], Wikipedie: Otevřená encyklopedie, c2016, Datum poslední revize 7. 12. 2016, 05:58 UTC, [citováno 8. 04. 2018]

https://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Wolfram_Alpha&oldid=14427420

Obrázky č. 1-4 jsou vygenerovány v sešitech editoru Excel, autor Petr Švarc [online], <https://svapet.webnode.cz/matematika/grafy-funkci-excel/>

Obrázky č. 5, 12-14 jsou vygenerovány v odpovídacím stroji Wolfram Alpha [online] <https://www.wolframalpha.com/>

Příloha 1

Tabulka průsečíků pro základy od 0,01 do 0,99 po setinách

a	Průsečík 1		Průsečík 2		Průsečík 3	
	x	y	x	y	x	y
0,01	0,01309253	0,941488327	0,27798743	0,27798743	0,941488327	0,013092523
0,02	0,03146157	0,884194352	0,30420452	0,30420452	0,884194352	0,031461565
0,03	0,05613297	0,821327365	0,32261916	0,32261916	0,821327365	0,056132969
0,04	0,08960085	0,749451248	0,33747076	0,33747076	0,749451248	0,089600847
0,05	0,1373594	0,66266083	0,35022486	0,35022486	0,66266083	0,137359399
0,06	0,21689807	0,543229523	0,36157981	0,36157981	0,543229523	0,21689807
0,07	0,37192833	0,371928315	0,37192833	0,37192833	0,371928315	0,37192833
0,08	0,38151534	0,381515339	0,38151534	0,38151534	0,381515339	0,38151534
0,09	0,39050495	0,390504932	0,39050495	0,39050495	0,390504932	0,390504949
0,1	0,39901298	0,399012977	0,39901298	0,39901298	0,399012977	0,39901298
0,11	0,40712462	0,407124615	0,40712462	0,40712462	0,407124615	0,40712462
0,12	0,41490451	0,414904501	0,41490451	0,41490451	0,414904501	0,414904509
0,13	0,42240302	0,422403002	0,42240302	0,42240302	0,422403002	0,422403018
0,14	0,42966025	0,429660232	0,42966025	0,42966025	0,429660232	0,429660247
0,15	0,43670873	0,436708716	0,43670873	0,43670873	0,436708716	0,436708728
0,16	0,44357526	0,443575259	0,44357526	0,44357526	0,443575259	0,44357526
0,17	0,45028224	0,450282239	0,45028224	0,45028224	0,450282239	0,45028224
0,18	0,4568486	0,456848588	0,4568486	0,4568486	0,456848588	0,456848597
0,19	0,46329051	0,463290493	0,46329051	0,46329051	0,463290493	0,463290506
0,2	0,46962193	0,469621918	0,46962193	0,46962193	0,469621918	0,469621927
0,21	0,47585502	0,475855013	0,47585502	0,47585502	0,475855013	0,475855018
0,22	0,48200045	0,482000442	0,48200045	0,48200045	0,482000442	0,482000448
0,23	0,48806764	0,488067637	0,48806764	0,48806764	0,488067637	0,488067639
0,24	0,49406499	0,494064982	0,49406499	0,49406499	0,494064982	0,494064988
0,25	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
0,26	0,50587946	0,505879445	0,50587946	0,50587946	0,505879445	0,505879455
0,27	0,51170947	0,511709469	0,51170947	0,51170947	0,511709469	0,51170947
0,28	0,51749564	0,517495636	0,51749564	0,51749564	0,517495636	0,517495639
0,29	0,52324307	0,523243061	0,52324307	0,52324307	0,523243061	0,523243067
0,3	0,52895645	0,528956447	0,52895645	0,52895645	0,528956447	0,528956449
0,31	0,53464013	0,534640125	0,53464013	0,53464013	0,534640125	0,534640128
0,32	0,54029813	0,540298123	0,54029813	0,54029813	0,540298123	0,540298127
0,33	0,5459342	0,545934189	0,5459342	0,5459342	0,545934189	0,545934196
0,34	0,55155184	0,551551836	0,55155184	0,55155184	0,551551836	0,551551838
0,35	0,55715436	0,557154347	0,55715436	0,55715436	0,557154347	0,557154354
0,36	0,56274485	0,562744835	0,56274485	0,56274485	0,562744835	0,562744843
0,37	0,56832625	0,568326236	0,56832625	0,56832625	0,568326236	0,568326244
0,38	0,57390135	0,57390134	0,57390135	0,57390135	0,57390134	0,573901346
0,39	0,57947281	0,579472805	0,57947281	0,57947281	0,579472805	0,579472808
0,4	0,58504318	0,585043168	0,58504318	0,58504318	0,585043168	0,585043174

0,41	0,59061488	0,590614879	0,59061488	0,59061488	0,590614879	0,59061488
0,42	0,59619028	0,596190277	0,59619028	0,59619028	0,596190277	0,596190278
0,43	0,60177164	0,601771633	0,60177164	0,60177164	0,601771633	0,601771636
0,44	0,60736115	0,607361148	0,60736115	0,60736115	0,607361148	0,607361149
0,45	0,61296096	0,612960953	0,61296096	0,61296096	0,612960953	0,612960956
0,46	0,61857314	0,618573133	0,61857314	0,61857314	0,618573133	0,618573136
0,47	0,62419973	0,624199723	0,62419973	0,62419973	0,624199723	0,624199726
0,48	0,62984272	0,62984272	0,62984272	0,62984272	0,62984272	0,62984272
0,49	0,63550409	0,635504078	0,63550409	0,63550409	0,635504078	0,635504083
0,5	0,64118575	0,641185742	0,64118575	0,64118575	0,641185742	0,641185746
0,51	0,64688962	0,64688962	0,64688962	0,64688962	0,64688962	0,64688962
0,52	0,65261761	0,652617599	0,65261761	0,65261761	0,652617599	0,652617603
0,53	0,65837158	0,65837157	0,65837158	0,65837158	0,65837157	0,658371574
0,54	0,66415341	0,664153404	0,66415341	0,66415341	0,664153404	0,664153407
0,55	0,66996498	0,669964968	0,66996498	0,66996498	0,669964968	0,669964973
0,56	0,67580815	0,675808137	0,67580815	0,67580815	0,675808137	0,675808142
0,57	0,68168479	0,681684787	0,68168479	0,68168479	0,681684787	0,681684788
0,58	0,6875968	0,687596798	0,6875968	0,6875968	0,687596798	0,687596799
0,59	0,69354607	0,693546067	0,69354607	0,69354607	0,693546067	0,693546068
0,6	0,69953451	0,699534509	0,69953451	0,69953451	0,699534509	0,699534509
0,61	0,70556406	0,705564054	0,70556406	0,70556406	0,705564054	0,705564056
0,62	0,71163667	0,711636661	0,71163667	0,71163667	0,711636661	0,711636664
0,63	0,71775432	0,717754316	0,71775432	0,71775432	0,717754316	0,717754317
0,64	0,72391904	0,723919029	0,72391904	0,72391904	0,723919029	0,723919033
0,65	0,73013286	0,730132859	0,73013286	0,73013286	0,730132859	0,730132859
0,66	0,73639789	0,736397889	0,73639789	0,73639789	0,736397889	0,736397889
0,67	0,74271626	0,742716253	0,74271626	0,74271626	0,742716253	0,742716255
0,68	0,74909014	0,749090135	0,74909014	0,74909014	0,749090135	0,749090137
0,69	0,75552177	0,755521765	0,75552177	0,75552177	0,755521765	0,755521766
0,7	0,76201344	0,762013428	0,76201344	0,76201344	0,762013428	0,762013431
0,71	0,76856748	0,768567479	0,76856748	0,76856748	0,768567479	0,768567479
0,72	0,77518633	0,775186323	0,77518633	0,77518633	0,775186323	0,775186325
0,73	0,78187245	0,781872448	0,78187245	0,78187245	0,781872448	0,781872449
0,74	0,78862842	0,788628409	0,78862842	0,78862842	0,788628409	0,788628412
0,75	0,79545686	0,795456848	0,79545686	0,79545686	0,795456848	0,795456851
0,76	0,8023605	0,802360489	0,8023605	0,8023605	0,802360489	0,802360491
0,77	0,80934216	0,809342149	0,80934216	0,80934216	0,809342149	0,809342152
0,78	0,81640475	0,816404747	0,81640475	0,81640475	0,816404747	0,816404747
0,79	0,82355131	0,8235513	0,82355131	0,82355131	0,8235513	0,823551302
0,8	0,83078495	0,830784948	0,83078495	0,83078495	0,830784948	0,830784949
0,81	0,83810895	0,838108944	0,83810895	0,83810895	0,838108944	0,838108945
0,82	0,84552668	0,845526674	0,84552668	0,84552668	0,845526674	0,845526675
0,83	0,85304167	0,853041659	0,85304167	0,85304167	0,853041659	0,853041661
0,84	0,86065758	0,860657571	0,86065758	0,86065758	0,860657571	0,860657573
0,85	0,86837824	0,868378237	0,86837824	0,86837824	0,868378237	0,868378238

0,86	0,87620766	0,876207651	0,87620766	0,87620766	0,876207651	0,876207652
0,87	0,88415	0,884149992	0,88415	0,88415	0,884149992	0,884149993
0,88	0,89220963	0,892209628	0,89220963	0,89220963	0,892209628	0,892209628
0,89	0,90039114	0,900391135	0,90039114	0,90039114	0,900391135	0,900391135
0,9	0,90869932	0,908699312	0,90869932	0,90869932	0,908699312	0,908699313
0,91	0,9171392	0,917139198	0,9171392	0,9171392	0,917139198	0,917139198
0,92	0,92571609	0,925716083	0,92571609	0,92571609	0,925716083	0,925716084
0,93	0,93443554	0,934435538	0,93443554	0,93443554	0,934435538	0,934435538
0,94	0,94330343	0,943303427	0,94330343	0,94330343	0,943303427	0,943303427
0,95	0,95232594	0,952325934	0,95232594	0,95232594	0,952325934	0,952325935
0,96	0,9615096	0,96150959	0,9615096	0,9615096	0,96150959	0,961509591
0,97	0,9708613	0,970861298	0,9708613	0,9708613	0,970861298	0,970861298
0,98	0,98038837	0,980388361	0,98038837	0,98038837	0,980388361	0,980388361
0,99	0,99009853	0,990098523	0,99009853	0,99009853	0,990098523	0,990098523

Příloha 2

Tabulka průsečíků pro základy od 0,001 do 0,1 po tisícinách

a	Průsečík 1		Průsečík 2		Průsečík 3	
	x	y	x	y	x	y
0,001	0,00105126	0,992764457	0,21951316	0,21951316	0,992764457	0,001051252
0,002	0,00217395	0,986580607	0,23382992	0,23382992	0,986580607	0,002173945
0,003	0,00335607	0,980692925	0,24330964	0,24330964	0,980692925	0,003356067
0,004	0,00459314	0,974958042	0,25062304	0,25062304	0,974958042	0,004593134
0,005	0,00588281	0,969311751	0,25667489	0,25667489	0,969311751	0,005882807
0,006	0,00722379	0,963717691	0,26189029	0,26189029	0,963717691	0,007223789
0,007	0,0086154	0,958152545	0,26650566	0,26650566	0,958152545	0,008615395
0,008	0,01005734	0,952600188	0,2706671	0,2706671	0,952600188	0,01005734
0,009	0,01154964	0,947048537	0,27447168	0,27447168	0,947048537	0,011549638
0,01	0,01309253	0,941488327	0,27798743	0,27798743	0,941488327	0,013092523
0,011	0,01468641	0,93591216	0,28126404	0,28126404	0,93591216	0,014686408
0,012	0,01633187	0,930313746	0,28433897	0,28433897	0,930313746	0,01633187
0,013	0,01802962	0,924687774	0,28724123	0,28724123	0,924687774	0,018029616
0,014	0,01978048	0,919029649	0,28999378	0,28999378	0,919029649	0,019780474
0,015	0,02158539	0,913335248	0,29261511	0,29261511	0,913335248	0,021585388
0,016	0,02344542	0,907600735	0,29512039	0,29512039	0,907600735	0,023445418
0,017	0,02536173	0,901822618	0,29752217	0,29752217	0,901822618	0,025361726
0,018	0,02733559	0,895997596	0,29983103	0,29983103	0,895997596	0,027335584
0,019	0,02936837	0,890122541	0,30205592	0,30205592	0,890122541	0,029368366
0,02	0,03146157	0,884194352	0,30420452	0,30420452	0,884194352	0,031461565
0,021	0,03361678	0,878210075	0,30628346	0,30628346	0,878210075	0,033616778
0,022	0,03583573	0,872166712	0,3082985	0,3082985	0,872166712	0,035835729
0,023	0,03812027	0,86606128	0,3102547	0,3102547	0,86606128	0,038120265
0,024	0,04047235	0,859890879	0,31215651	0,31215651	0,859890879	0,04047235

0,025	0,04289411	0,853652394	0,31400788	0,31400788	0,853652394	0,042894109
0,026	0,0453878	0,847342768	0,31581232	0,31581232	0,847342768	0,0453878
0,027	0,04795585	0,840958793	0,31757298	0,31757298	0,840958793	0,047955847
0,028	0,05060084	0,834497216	0,31929267	0,31929267	0,834497216	0,050600837
0,029	0,05332555	0,827954608	0,32097396	0,32097396	0,827954608	0,053325549
0,03	0,05613297	0,821327365	0,32261916	0,32261916	0,821327365	0,056132969
0,031	0,0590263	0,814611736	0,32423036	0,32423036	0,814611736	0,059026296
0,032	0,06200896	0,807803824	0,32580948	0,32580948	0,807803824	0,062008958
0,033	0,06508467	0,800899401	0,32735826	0,32735826	0,800899401	0,065084669
0,034	0,06825743	0,79389401	0,32887833	0,32887833	0,79389401	0,068257426
0,035	0,07153153	0,786782986	0,33037114	0,33037114	0,786782986	0,071531529
0,036	0,07491167	0,779561189	0,33183807	0,33183807	0,779561189	0,074911667
0,037	0,0784029	0,772223232	0,33328038	0,33328038	0,772223232	0,078402897
0,038	0,08201073	0,76476326	0,33469922	0,33469922	0,76476326	0,082010729
0,039	0,08574119	0,757174889	0,33609567	0,33609567	0,757174889	0,085741189
0,04	0,08960085	0,749451248	0,33747076	0,33747076	0,749451248	0,089600847
0,041	0,09359691	0,741584861	0,3388254	0,3388254	0,741584861	0,09359691
0,042	0,09773734	0,733567442	0,34016047	0,34016047	0,733567442	0,097737337
0,043	0,10203089	0,72539001	0,3414768	0,3414768	0,72539001	0,102030889
0,044	0,10648731	0,717042545	0,34277514	0,34277514	0,717042545	0,10648731
0,045	0,11111746	0,708513933	0,34405622	0,34405622	0,708513933	0,111117459
0,046	0,11593348	0,69979182	0,3453207	0,3453207	0,69979182	0,115933479
0,047	0,12094906	0,690862284	0,34656923	0,34656923	0,690862284	0,120949059
0,048	0,12617969	0,681709629	0,34780239	0,34780239	0,681709629	0,126179689
0,049	0,13164304	0,672315974	0,34902076	0,34902076	0,672315974	0,13164304
0,05	0,1373594	0,66266083	0,35022486	0,35022486	0,66266083	0,137359399
0,051	0,14335225	0,652720536	0,35141519	0,35141519	0,652720536	0,14335225
0,052	0,14964905	0,642467436	0,35259224	0,35259224	0,642467436	0,149649049
0,053	0,15628219	0,631868985	0,35375645	0,35375645	0,631868985	0,15628219
0,054	0,16329044	0,620886217	0,35490825	0,35490825	0,620886217	0,163290439
0,055	0,17072073	0,609472057	0,35604805	0,35604805	0,609472057	0,170720729
0,056	0,17863092	0,597568472	0,35717622	0,35717622	0,597568472	0,178630919
0,057	0,18709365	0,585102678	0,35829315	0,35829315	0,585102678	0,18709365
0,058	0,19620235	0,571981084	0,35939917	0,35939917	0,571981084	0,196202349
0,059	0,20608062	0,558079951	0,36049461	0,36049461	0,558079951	0,20608062
0,06	0,21689807	0,543229523	0,36157981	0,36157981	0,543229523	0,21689807
0,061	0,22889867	0,527185692	0,36265506	0,36265506	0,527185692	0,22889867
0,062	0,24245663	0,509574115	0,36372064	0,36372064	0,509574115	0,24245663
0,063	0,25820178	0,489764827	0,36477684	0,36477684	0,489764827	0,25820178
0,064	0,27736307	0,46652875	0,36582392	0,36582392	0,46652875	0,27736307
0,065	0,30312399	0,436682271	0,36686213	0,36686213	0,436682271	0,30312399
0,066	0,36789171	0,367891709	0,36789171	0,36789171	0,367891709	0,36789171
0,067	0,36891291	0,368912898	0,36891291	0,36891291	0,368912898	0,36891291
0,068	0,36992593	0,36992593	0,36992593	0,36992593	0,36992593	0,36992593
0,069	0,37093101	0,370930992	0,37093101	0,37093101	0,370930992	0,37093101

0,07	0,37192833	0,371928315	0,37192833	0,37192833	0,371928315	0,37192833
0,071	0,3729181	0,372918086	0,3729181	0,3729181	0,372918086	0,3729181
0,072	0,37390051	0,373900493	0,37390051	0,37390051	0,373900493	0,37390051
0,073	0,37487574	0,374875723	0,37487574	0,37487574	0,374875723	0,37487574
0,074	0,37584396	0,375843957	0,37584396	0,37584396	0,375843957	0,37584396
0,075	0,37680536	0,376805345	0,37680536	0,37680536	0,376805345	0,37680536
0,076	0,37776008	0,377760073	0,37776008	0,37776008	0,377760073	0,37776008
0,077	0,37870829	0,378708285	0,37870829	0,37870829	0,378708285	0,37870829
0,078	0,37965014	0,379650137	0,37965014	0,37965014	0,379650137	0,37965014
0,079	0,38058578	0,380585771	0,38058578	0,38058578	0,380585771	0,38058578
0,08	0,38151534	0,381515339	0,38151534	0,38151534	0,381515339	0,38151534
0,081	0,38243897	0,382438966	0,38243897	0,38243897	0,382438966	0,38243897
0,082	0,3833568	0,383356785	0,3833568	0,3833568	0,383356785	0,383356799
0,083	0,38426895	0,384268932	0,38426895	0,38426895	0,384268932	0,384268949
0,084	0,38517554	0,385175534	0,38517554	0,38517554	0,385175534	0,38517554
0,085	0,3860767	0,386076699	0,3860767	0,3860767	0,386076699	0,3860767
0,086	0,38697255	0,38697254	0,38697255	0,38697255	0,38697254	0,38697255
0,087	0,38786319	0,387863181	0,38786319	0,38786319	0,387863181	0,387863189
0,088	0,38874873	0,388748726	0,38874873	0,38874873	0,388748726	0,38874873
0,089	0,38962928	0,389629279	0,38962928	0,38962928	0,389629279	0,38962928
0,09	0,39050495	0,390504932	0,39050495	0,39050495	0,390504932	0,390504949
0,091	0,39137582	0,391375803	0,39137582	0,39137582	0,391375803	0,391375819
0,092	0,39224199	0,392241983	0,39224199	0,39224199	0,392241983	0,39224199
0,093	0,39310356	0,393103558	0,39310356	0,39310356	0,393103558	0,39310356
0,094	0,39396063	0,393960611	0,39396063	0,39396063	0,393960611	0,393960629
0,095	0,39481326	0,394813254	0,39481326	0,39481326	0,394813254	0,39481326
0,096	0,39566156	0,39566155	0,39566156	0,39566156	0,39566155	0,395661559
0,097	0,3965056	0,396505594	0,3965056	0,3965056	0,396505594	0,3965056
0,098	0,39734547	0,397345456	0,39734547	0,39734547	0,397345456	0,397345469
0,099	0,39818124	0,398181223	0,39818124	0,39818124	0,398181223	0,398181239
0,1	0,39901298	0,399012977	0,39901298	0,39901298	0,399012977	0,39901298

Příloha 3 – obsah vloženého CD

Text práce ve formátu *.pdf*

Samostatně spustitelná aplikace *průsečík*

Složka s tabulkami ve formátu *.xlsx*

Složka výstupními soubory aplikace ve formátu *.txt*